

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI



Katedra optiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Metody pro ovládání amplitudových a fázových modulátorů světla

Vypracoval:

Vedoucí diplomové práce:

Studijní obor:

Datum odevzdání práce:

Bc. Filip Chlup

Prof. RNDr. Zdeněk Bouchal, Dr.

Optika a optoelektronika, 5. ročník

6. srpna 2007

Prohlášení:

Prohlašuji, že tuto práci jsem zpracoval zcela samostatně s použitím literatury uvedené v seznamu literatury a pod vedením Prof. RNDr. Zdeňka Bouchala, Dr.

V Olomouci dne 6. srpna 2007

.....

Poděkování:

Děkuji vedoucímu práce Prof. RNDr. Zdeňku Bouchalovi, Dr. za odborné vedení a pomoc při psaní práce a Mgr. Radku Čelechovskému za cenné rady v laboratoři katedry optiky.

Dále děkuji svým rodičům a své snoubence za motivaci a trpělivost při psaní diplomové práce.

Obsah

Seznam zkratk

1. Úvod a cíle diplomové práce.....	1
2. Šíření světla při zadaném hraničním rozdělení komplexní amplitudy.....	2
2.1. Základní přístupy k popisu šíření světla.....	3
2.2. Funkce prostorového modulátoru světla.....	3
2.2.1. Kvalitativní projevy difrakce na prostorovém modulátoru světla.....	4
2.2.2. Kvantitativní projevy difrakce na prostorovém modulátoru světla.....	8
2.2.3. Parametry prostorových modulátorů světla XGA3 CRL OPTO a P512 BOULDER....	12
2.3. Fourierovská optika.....	13
2.3.1. Vlastnosti Fourierovy transformace.....	13
2.3.2. Optická přenosová funkce volného prostoru.....	14
2.3.3. Prostorová filtrace pomocí 4-f systému.....	16
2.3.4. Počítačová simulace prostorové filtrace.....	17
3. Numerická simulace činnosti modulátoru světla.....	19
3.1. Digitalizace komplexní amplitudy.....	19
3.1.1. Whittaker – Shannonův vzorkovací teorém.....	19
3.1.2. Moiré efekt.....	21
3.2. Numerická Fourierova transformace.....	22
3.2.1. Diskrétní Fourierova transformace.....	23
3.2.2. Rychlá Fourierova transformace.....	24
3.3. Omezení při simulaci činnosti prostorového modulátoru.....	27
3.3.1. Spojitost mezi vzorkováním ve vstupní a výstupní rovině.....	27
3.3.2. Popis vlastního programu pro simulaci činnosti modulátoru.....	29

4. Tvarování gaussovského svazku prostřednictvím prostorového modulátoru.	30
4.1. Prostorově modulované gaussovské svazky.....	30
4.2. Tvarování gaussovského svazku prostřednictvím amplitudového modulátoru.....	33
4.2.1. Zápis a rekonstrukce hologramu.....	33
4.2.2. Experimentální provedení prostorového tvarování gaussovského svazku.....	35
4.3. Tvarování gaussovského svazku prostřednictvím fázového modulátoru.....	39
5. Třírozměrná lokalizace světla prostřednictvím modulátoru.....	41
5.1. Optické manipulace s částicemi.....	41
5.2. Lokalizace světla pomocí analyticky určených DOE.....	43
5.2.1. Lokalizace světla v příčné rovině.....	43
5.2.2. Lokalizace světla v různých pozorovacích rovinách.....	48
5.3. Lokalizace světla pomocí numericky určených DOE.....	56
5.3.1. Iterační algoritmy pro návrh fázových masek prostorového modulátoru.....	56
5.3.2. Formulace inverzní úlohy určení fáze.....	56
5.3.3. Gerchbergův – Saxtonův algoritmus.....	57
6. Závěr.....	60
Seznam použité literatury.....	61
Programové přílohy	
1. FFT.....	63
2. HG svazky.....	66
3. LG svazky.....	68
4. Fázové masky.....	70
5. Kreslicí program.....	74

Seznam zkratek

BG	besselovský – gaussovský svazek
CCD	Charge - Coupled Device
CGH	Computer Generated Hologram
CPU	Central Processing Unit
DFT	diskrétní Fourierova transformace
DOE	Diffractive Optical Elements
FFT	Fast Fourier Transform
FT	Fourierova transformace
GS	Gerchbergův – Saxtonův algoritmus
He-Ne laser	Helium – Neonový laser
HG	hermiteovský – gaussovský svazek
HOT	Holographic Optical Tweezers
IFTA	Iterative Fourier Transformation Algorithms
LG	laguerreovský – gaussovský svazek
OSLO	Optics Software for Layout and Optimization
P512BOULDER	typ amplitudového SLM
SLM	Spatial Light Modulator
STED	Stimulated – Emission - Depletion microscopy
XGA3 CRL OPTO	typ fázového SLM

1. Úvod a cíle diplomové práce

Prostorový modulátor světla, který se často uvádí pod zkratkou SLM (Spatial Light Modulator), je difrakční optický element, pomocí kterého můžeme dynamicky ovládat procházející komplexní amplitudu světla. Modulace dopadajícího záření je zaručena možností počítačově ovládat komplexní funkci propustnosti $t(x, y)$ jednotlivých pixelů, které tvoří SLM. Využití prostorového modulátoru světla je značně bohatší než využití klasických optických prvků (čočka, optický klín), které poskytují pouze pevnou modulaci komplexní amplitudy. Na druhé straně ovládání SLM vyžaduje popis širší třídy optických jevů (difrakce, prostorová filtrace, holografie, ...), jejich počítačovou simulaci a vyhodnocení omezení, která počítačová simulace sebou přináší.

Ve druhé kapitole této práce popíšeme základní funkci SLM jako difrakčního optického elementu. Zároveň uvedeme základy fourierovské optiky, která je účinným nástrojem při popisu šíření světla pro zadané hraniční rozdělení komplexní amplitudy a při modulaci optického záření prostřednictvím SLM.

V následující kapitole se zaměříme na numerickou simulaci činnosti SLM. Podrobněji budou prostudovány jevy související s digitalizací komplexní amplitudy a numerickou Fourierovou transformací. Na závěr kapitoly uvedeme omezení, která s sebou numerická simulace činnosti SLM přináší.

Ve čtvrté kapitole zpracujeme metody pro přípravu počítačově generovaných hologramů, které umožní konverzi gaussovského svazku na nestandardní typ svazku (hermiteovský – gaussovský, laguerreovský – gaussovský). Provedeme jejich počítačovou simulaci pomocí vlastních programů a experimentální realizaci pomocí prostorových modulátorů CRL OPTO a BOULDER.

V páté kapitole popíšeme metody třírozměrné lokalizace světla využitelné pro optické manipulace. Opět provedeme počítačovou simulaci a experimentální realizaci prostřednictvím prostorových modulátorů CRL OPTO a BOULDER.

Součástí práce jsou i vlastní programy, jejichž zdrojový kód je uveden v příloze. Programy byly naprogramovány v jazyce C s využitím grafické knihovny GD, která umožnila vykreslovat výstupy z programů.

2. Šíření světla při zadaném hraničním rozdělení komplexní amplitudy

Prostorový modulátor světla (SLM) tvoří matice ovladatelných pixelů mikrometrových rozměrů, které lokálně ovlivňují fázi nebo amplitudu dopadající elektromagnetické vlny. Matematicky lze vliv SLM v rovině $z = 0$ popsat funkcí propustnosti $t(x, y)$, která splňuje vztah

$$U_i(x, y, 0) = t(x, y) U_o(x, y, 0), \quad (2.1)$$

kde $U_o(x, y, 0)$ je komplexní amplituda vlny po průchodu SLM a $U_i(x, y, 0)$ je komplexní amplituda dopadající vlny na SLM [1].

Lokální změna fáze či amplitudy dopadající elektromagnetické vlny je zapříčiněna změnou optických vlastností jednotlivých pixelů, které tvoří SLM. Jedná se většinou o anizotropní materiály (např. kapalně krystaly), jejichž optické vlastnosti můžeme měnit např. mechanickou vlnou (akustooptické SLM), změnou přiloženého elektrického pole (elektrooptické SLM), změnou přiloženého magnetického pole (magnetooptické SLM) nebo intenzitou jiné elektromagnetické vlny (optooptické SLM). Např. elektrooptický SLM se stočeným nematickým kapalným krystalem působí na dopadající záření v každém pixelu jako polarizační rotátor. Výsledné stočení roviny polarizace závisí na velikosti přivedeného elektrického napětí, kterým jednotlivé pixely SLM ovládáme. Umístíme-li tyto krystaly mezi zkřížené polarizátory, dostáváme ovladatelnou funkci propustnosti SLM, která závisí na velikosti přivedeného elektrického napětí. Funkce propustnosti je obecně komplexní a normovaná funkcí, tedy $|t(x, y)| \leq 1$. Dle tvaru $t(x, y)$ rozdělujeme SLM na

- amplitudové modulátory světla – $t(x, y) = t^*(x, y) > 0$, kde hvězdička značí číslo komplexně sdružené;
- fázové modulátory světla – $t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]$, kde $\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y)$ je fázová funkce.

Ze vztahu (2.1) plyne, že $t(x, y)$ je funkce, kterou násobíme počáteční komplexní amplitudu, abychom získali výsledné pole. Ve většině případů je snaha maximalizovat absolutní hodnotu funkce propustnosti, aby při interakci s SLM nedocházelo k úbytku elektromagnetické energie. Z toho důvodu jsou fázové SLM perspektivnější. Funkce propustnosti SLM má skokový průběh, protože každý pixel SLM může nabývat pouze konstantních hodnot.

Metody popisu šíření světla při zadaném hraničním rozdělení komplexní amplitudy se za předpokladu monochromatického záření opírají o diferenciální Helmholtzovu rovnici. Pro lineární optická prostředí platí princip superpozice a tedy rozklad libovolné postupné elektromagnetické vlny do souboru rovinných, paraboloidních nebo kulových vln [2].

2.1. Základní přístupy k popisu šíření světla

Dle Huygensova-Fresnelova principu se světlo šíří postupným vyzařováním. Body na vlnoploše generují kulové vlny, jejichž superpozice tvoří novou vlnoplochu. Matematicky lze tento princip zapsat pomocí konvoluce [3]

$$U_d(x, y, d) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_o(x', y', 0) h(x-x', y-y') dx' dy', \quad (2.2)$$

kde $U_d(x, y, d)$ je komplexní amplituda vlny po průchodu SLM ve vzdálenosti d a $h(x, y)$ je funkce impulsové odezvy volného prostoru, která může představovat buď vlnu sférickou nebo v paraxiální oblasti vlnu paraboloidní. Proto tento prostorový (konvoluční) přístup k popisu šíření světla komplexní amplitudy odpovídá Huygensovu - Fresnelovu principu.

Druhý přístup je založen na Fourierově transformaci vztahu (2.2) v analogii s harmonickou analýzou, která umožňuje libovolnou postupnou elektromagnetickou vlnu vyjádřit jako sumu rovinných vln o různých úhlových frekvencích a komplexních amplitudách. Vztah (2.2) přepíšeme na

$$F_d(v_x, v_y) = H(v_x, v_y) F_o(v_x, v_y), \quad (2.3)$$

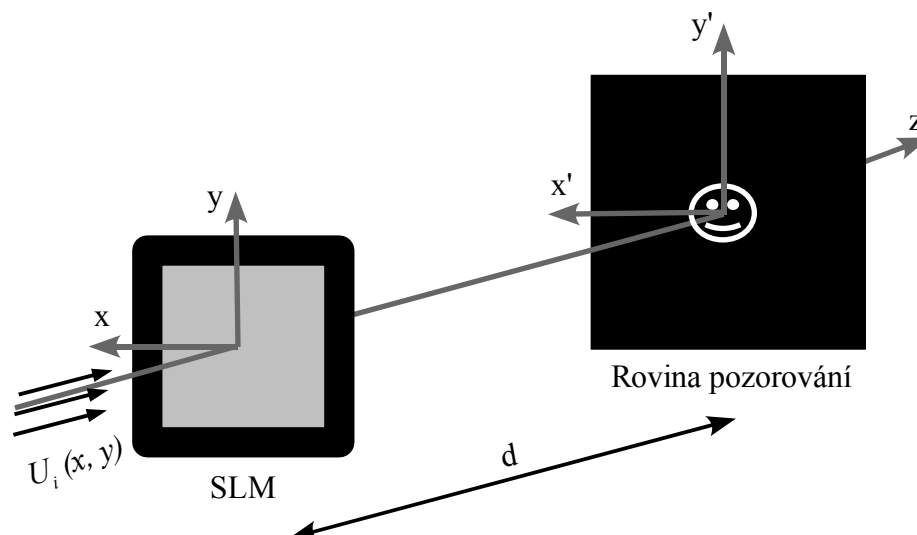
kde $F_d(v_x, v_y)$, $F_o(v_x, v_y)$ a $H(v_x, v_y)$ jsou po řadě Fourierova transformace $U_d(x, y, d)$, $U_o(x, y, 0)$ a $h(x, y)$. Funkce $H(v_x, v_y)$ se nazývá optickou přenosovou funkcí volného prostoru. Tento přístup k popisu šíření světla se nazývá frekvenční.

Optická přenosová funkce a funkce impulsové odezvy v obecnějším vyjádření necharakterizují pouze vliv volného prostoru na šíření světla, ale i další vlivy optických prvků, které šíření světla ovlivňují.

2.2. Funkce prostorového modulátoru světla

Po prostorovém modulátoru světla požadujeme, aby přicházející vlnu o komplexní amplitudě $U_i(x, y, 0)$ moduloval takovým způsobem, aby v pozorovací rovině vzdálené d od SLM vzniklo určité požadované rozdělení komplexní amplitudy $U_d(x, y, d)$. SLM, který vytvoří takové rozdělení komplexní amplitudy bez dalších přidavných jevů, nazveme ideální (obr. 2.1).

Ve skutečnosti zobrazení reálným SLM doprovází řada dalších fyzikálních jevů, které nevedou k tak přímočarému výsledku jako ideální SLM. Rozhodujícím jevem je difrakce, která se významně projevuje na třech strukturách SLM: na jednotlivých pixelech modulátoru (tzv. pevná mřížka), na profilu funkce propustnosti SLM (tzv. pracovní mřížka) a na ohraničující apertuře modulátoru. Jejich význam a vliv na zobrazení postupně přiblížíme v následujících podkapitole.

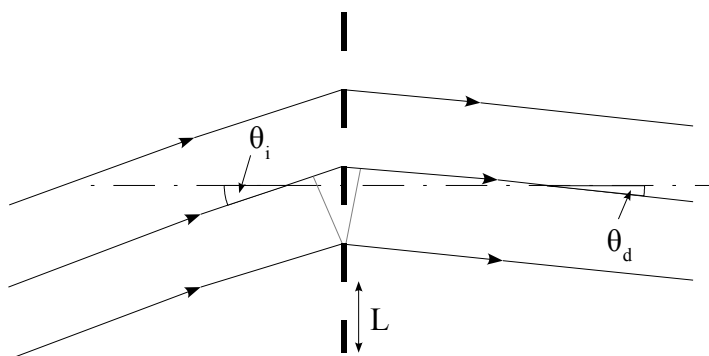


Obr. 2.1: Obraz vytvořený ideálním prostorovým modulátorem

2.2.1. Kvalitativní projevy difrakce na prostorovém modulátoru světla

Difrakce na pevné mřížce modulátoru

Skalární difrakční teorie, založená na Huygensově-Fresnelově principu, odráží vlnovou povahu světla, které se za překážkou šíří i za hranici geometrického stínu. Při studiu SLM ji nelze opomenout, protože SLM je v podstatě kromě ovladatelných pixelů složen i z nepropustných oblastí, které od sebe jednotlivé pixely oddělují. A právě zde je první důležitý projev difrakce světla – difrakce na pixelech SLM, které tvoří pevnou binární mřížku. Zjednodušeně si ji můžeme představit jako difrakci na lineární mřížce (obr. 2.2).



Obr. 2.2: Difrakce na lineární mřížce

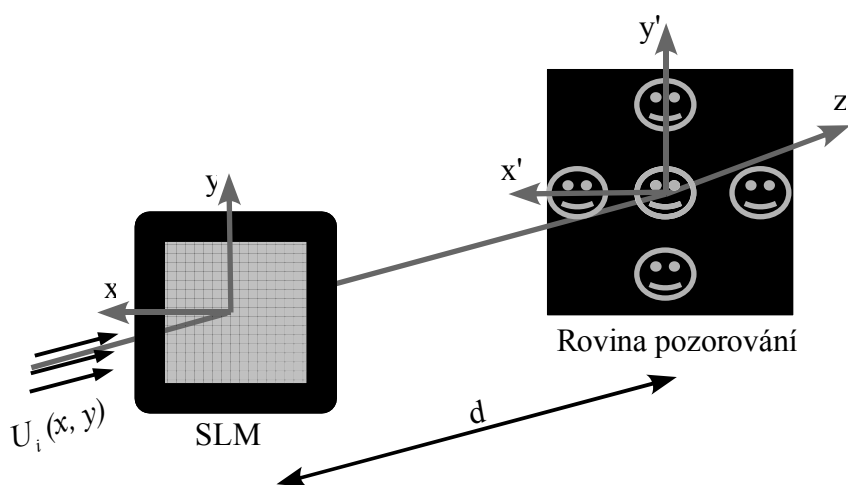
Ve vzdáleném poli se bude světlo difraktované na lineární mřížce zesilovat interferencí ve směrech, pro které je splněna podmínka konstruktivní interference.

Matematicky můžeme tuto skutečnost zapsat pomocí mřížkové rovnice

$$\sin(\Theta_d) - \sin(\Theta_i) = \frac{m\lambda}{L}, \quad (2.4)$$

kde L je mřížková konstanta, θ_i úhel dopadu, θ_d úhel difraktovaného záření a $m = 0, 1, 2, \dots$

Ze vztahu (2.4) je zřejmé, že pro dopadající záření pod úhlem θ_i je možné několik směrů θ_d pro difraktované záření v závislosti na m . Proto průchodem pevné binární mřížky, která odděluje jednotlivé pixely, se dopadající záření rozdělí do mnoha směrů, tzv. difrakčních řádů (obr. 2.3).



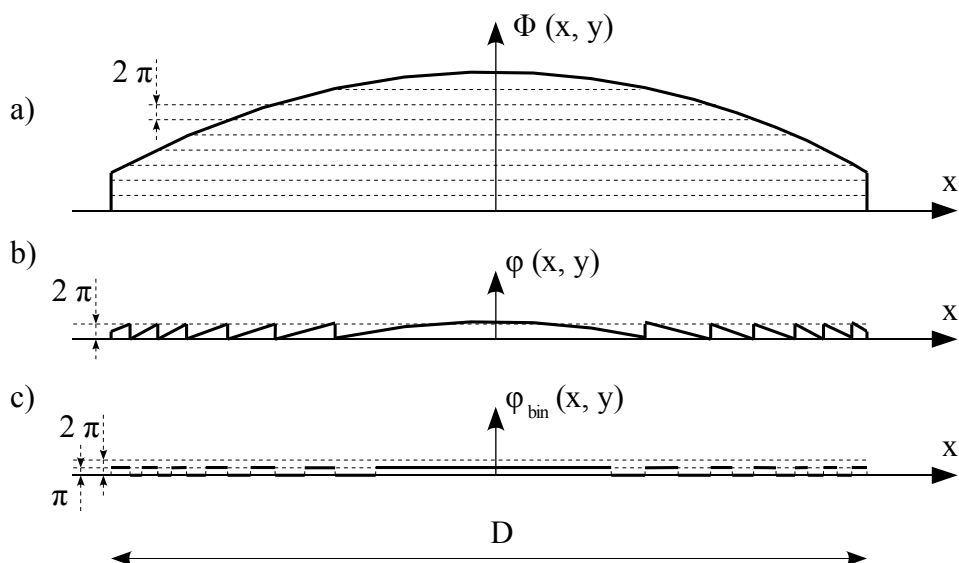
Obr. 2.3: Difrakce na pevné mřížce modulátoru

Difrakce na pracovní mřížce modulátoru

SLM je difrakční optický element, jehož funkce propustnosti $t(x, y)$ může nabývat pouze některých hodnot z určitého intervalu. Proto musíme hodnoty $t(x, y)$, které chceme nastavit na SLM, diskretizovat a redukovat na určitý interval. Pro amplitudový SLM platí v ideálním případě, že $t(x, y) \in [0, 1]$ a pro fázový SLM

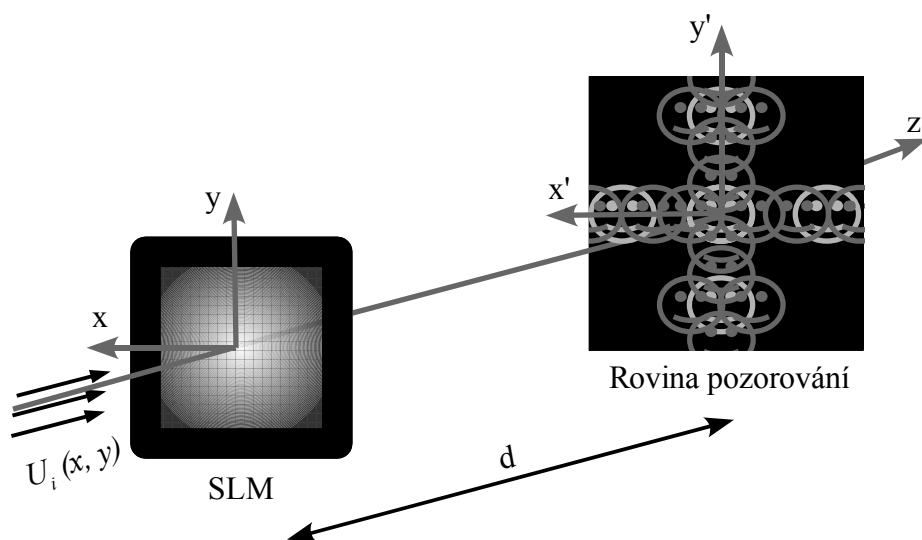
$$t(x, y) = \exp[i\Phi(x, y)] = \exp[i\varphi(x, y)], \quad (2.5)$$

kde $\Phi(x, y)$ je spojitá fázová funkce a $\varphi(x, y) \in [0, 2\pi]$ je redukováná fázová funkce. Pro fázový SLM jsme mohli redukovat spojitou fázovou funkci $\Phi(x, y)$ na interval $[0, 2\pi]$, protože funkce propustnosti (2.5) je periodickou funkcí s periodou 2π . Způsob převedení spojitě fázové funkce sférické čočky $\Phi(x, y)$ do nejjednoduššího diskretizovaného binárního tvaru $\varphi_{\text{bin}}(x, y)$ adresovatelného na fázový SLM je znázorněn na obr. 2.4.



Obr. 2.4: Přepis fázové funkce jednoduché čočky průměru D do tvaru adresovatelného na fázový SLM: a) spojitá fázová funkce čočky
b) redukovaná fázová funkce čočky na interval $[0, 2\pi]$
c) binární redukovaná fázová funkce pro úrovně fáze $(0, \pi)$

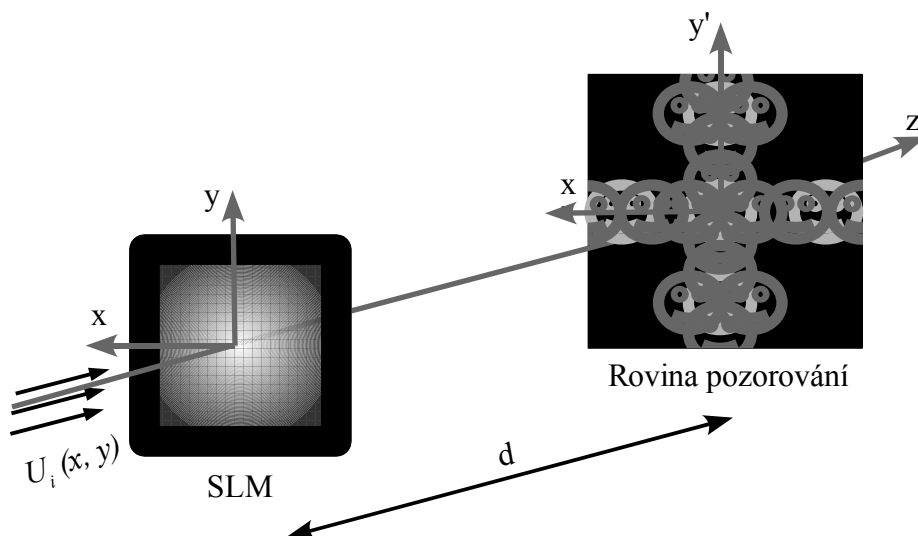
Funkce propustnosti SLM vytváří ostré přechody a chová se jako další mřížka – pracovní mřížka. Může mít např. binární (viz obr. 2.4), sinusový, pilovitý nebo jiný průběh [4] (podrobněji si jednotlivých průběhů pracovní mřížky všimneme v následující podkapitole, viz obr. 2.7). Na této struktuře dochází k další difrakci a štěpení difrakčních řádů vytvořených pevnou mřížkou SLM. Na obr. 2.5 je znázorněno štěpení difrakčních řádů způsobené pracovní mřížkou se sinusovým amplitudovým průběhem, která štěpí každý difrakční řád vytvořený pevnou mřížkou SLM do dalších třech sekundárních řádů v každé ose.



Obr. 2.5: Difrakce na pracovní a pevné mřížce modulátoru

Difrakce na apertuře modulátoru

Posledním významným projevem difrakce je difrakce na apertuře SLM, která ho ohraničuje. Výsledkem by opět mělo být rozdělení světla do dalších směrů. Protože však velikost apertury je značně větší než velikost jednotlivých pixelů, projeví se tato difrakce pouze jako rozmazání již stávajících difrakčních řádů (obr. 2.6).



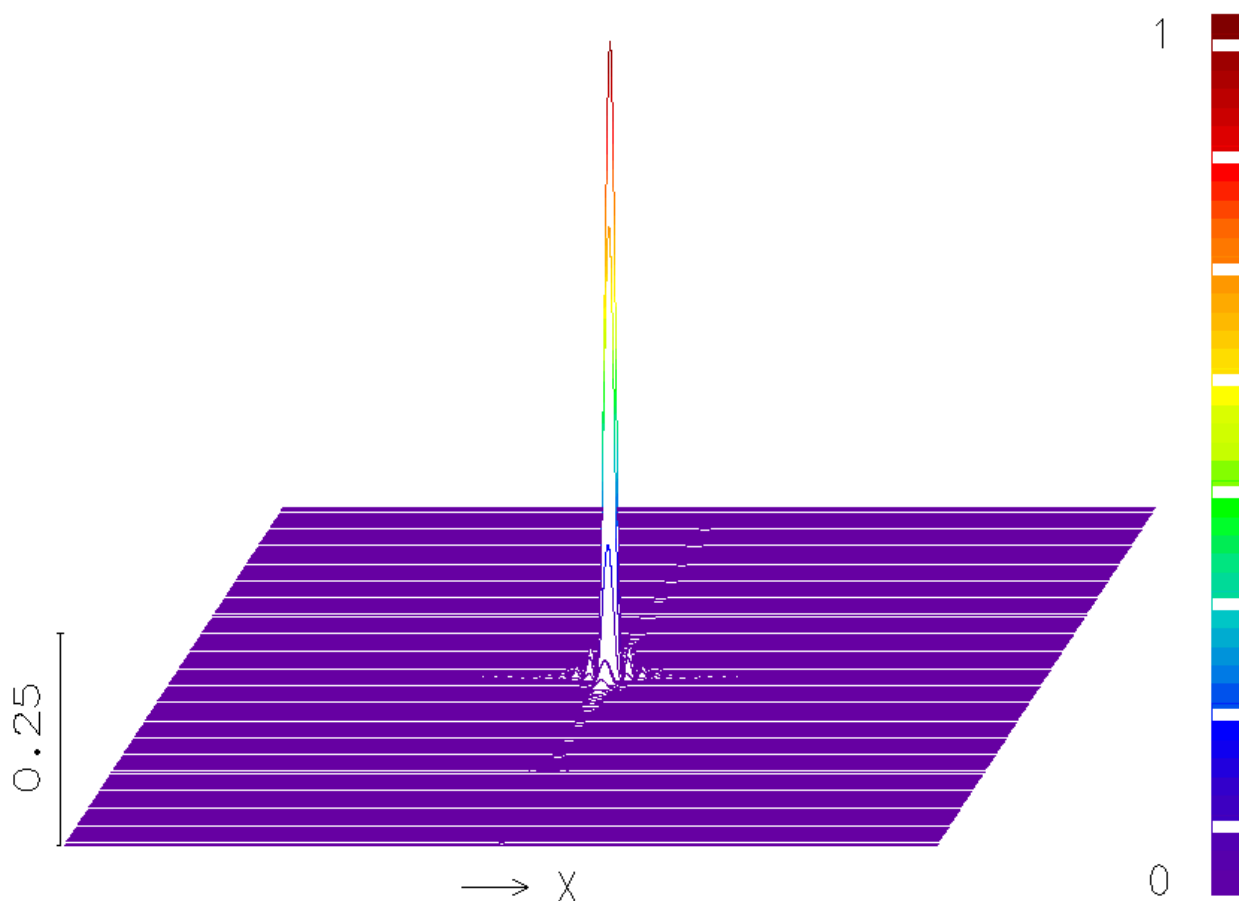
Obr. 2.6: Difrakce na apertuře, pracovní a pevné mřížce modulátoru

2.2.2. Kvantitativní projevy difrakce na prostorovém modulátoru světla

Kvantitativně můžeme projevy difrakce na jednotlivých pixelech pracovní mřížky nebo difrakce na celé apertuře popisovat jako difrakci na obdélníkovém otvoru. Dopadá-li na SLM rovinná vlna o intenzitě I_i , pak difrakcí na obdélníku o stranách D_x, D_y se ve vzdálenosti d vytvoří difrakční obrazec s průběhem intenzity [3]

$$I(x', y') = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{D_x x'}{\lambda d}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{D_y y'}{\lambda d}\right), \quad (2.6)$$

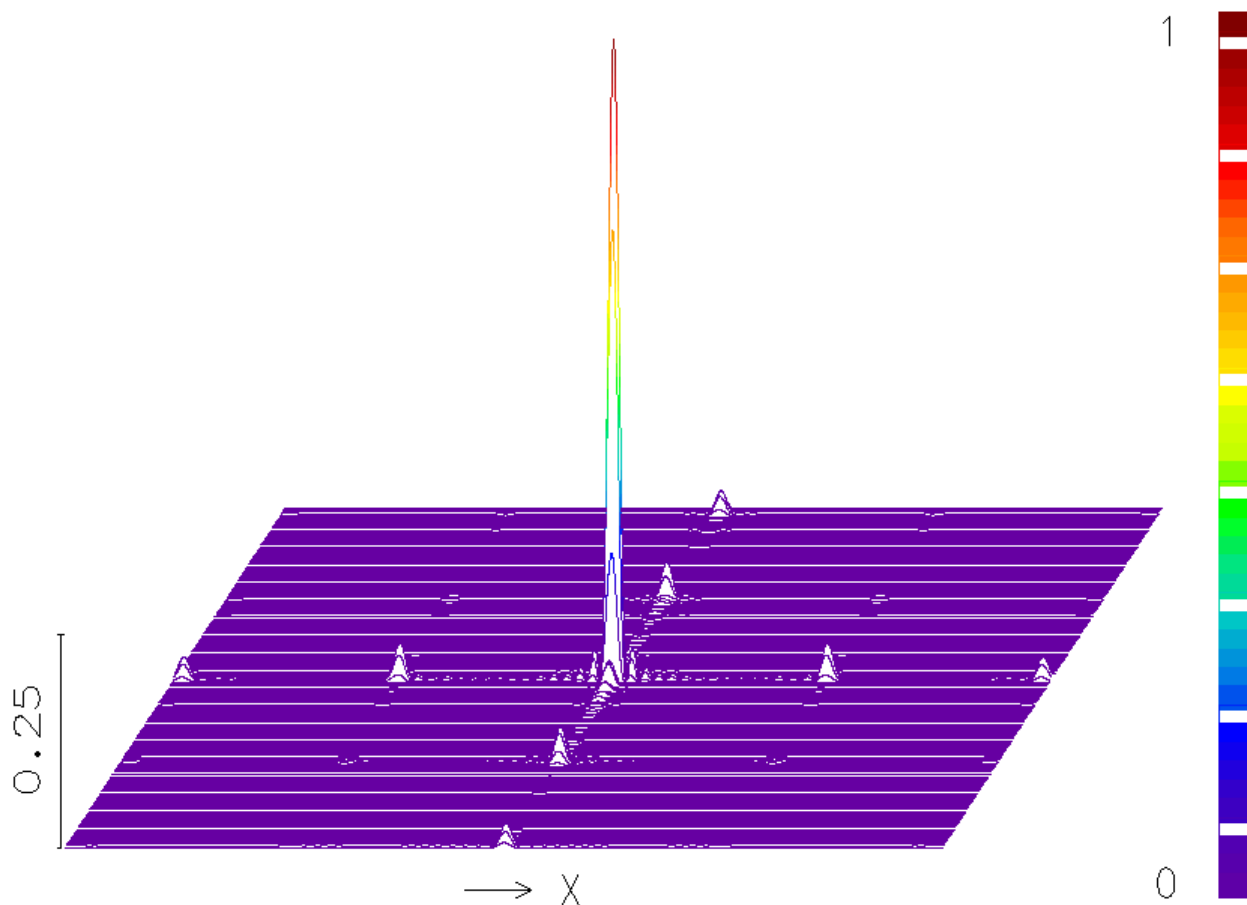
kde λ je vlnová délka použitého záření, $I_0 = I_i [D_x D_y / (\lambda d)]^2$ je maximální intenzita difrakčního obrazce a $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$. Graf této funkce, vytvořený pomocí komerčního optického programu OSLO [5], ukazuje graf. 2.1.



Graf 2.1: Zobrazení difrakce na čtvercové apertuře SLM o straně 7,6 mm, ve vzdálenosti 50 m, při použitém záření o vlnové délce 587,6 nm na čtvercovém stínítku o straně 250 mm

Z grafu 2.1 je patrné, že energie dopadajícího záření se rovnoměrně rozdělila podle vztahu (2.6) kolem hlavního maxima, do kterého je soustředěna převážná část dopadajícího záření.

Pro zviditelnění difrakčních řádů, o kterých mluvíme v souvislosti s SLM, musíme započítat difrakce na jednotlivých pixelech SLM. Následující graf 2.2 ukazuje součinnost (konvoluci) obou difrakcí, kdy jsme aperturu z grafu 2.1 rozdělili nepropustnou pracovní binární mřížkou na 16 x 16 pixelů.



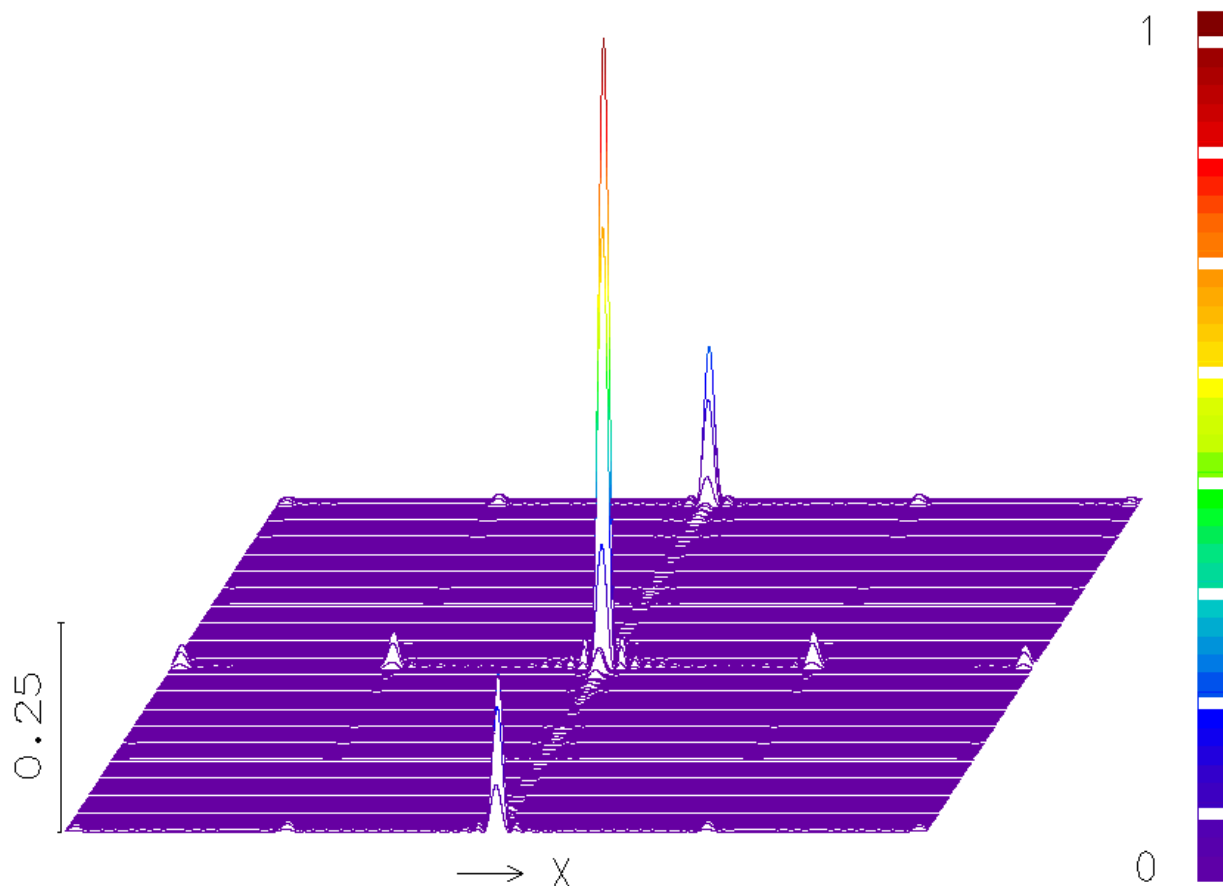
Graf 2.2: Součinnost difrakce na čtvercové apertuře SLM při parametrech z grafu 2.1 a difrakce na pracovní binární mřížce, která rozdělí SLM na 16x16 čtvercových pixelů o straně 0.325 mm

V grafu 2.2 již vidíme rozdělení světla do jednotlivých difrakčních řádů. První body s nulovou intenzitou (tzv. nulové body) difrakčního obrazce (2.6) v rovině (x', y') vzniknou pod úhly

$$\Theta_{x'} = \frac{\lambda}{D_x}, \quad \Theta_{y'} = \frac{\lambda}{D_y}. \quad (2.7)$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že difrakcí na jednotlivých pixelech pracovní mřížky o rozměrech D_x, D_y vznikají vedlejší difrakční řády úhlově výrazněji oddělené než difrakční řády vzniklé vlivem difrakce na celé apertuře SLM. Proto difrakci na apertuře SLM chápeme jako rozmazání jednotlivých difrakčních řádů vzniklých na jednotlivých pixelech.

Vliv počtu pixelů na celkový difrakční obrazec ukazuje graf 2.3. Zvyšováním počtu pixelů v jednom směru (při stejné velikosti apertury SLM) rostou hlavní maxima jednotlivých difrakčních řádů na úkor svých vedlejších maxim. Je to důsledek mnohosvazkové interference jednotlivých vln, jejichž počet roste s počtem pixelů [6]. Zároveň se mění vzdálenosti mezi jednotlivými difrakčními řády.



Graf 2.3: Vliv počtu pixelů na výsledné rozdělení intenzity při stejných parametrech jako v grafu 2.2, ale při rozdílné binární pracovní mřížce, která dělí SLM na 16x32 obdélníkových pixelů

Na závěr je třeba ještě započíst rozdělení dopadajícího záření vlivem masky SLM, která však může mít v závislosti na svém průběhu různý počet difrakčních řádů. Proto zavedeme veličinu difrakční účinnost η_m , která je pro m -tý difrakční řád definovaná jako

$$\eta_m = \frac{I_m}{I_i}, \quad (2.8)$$

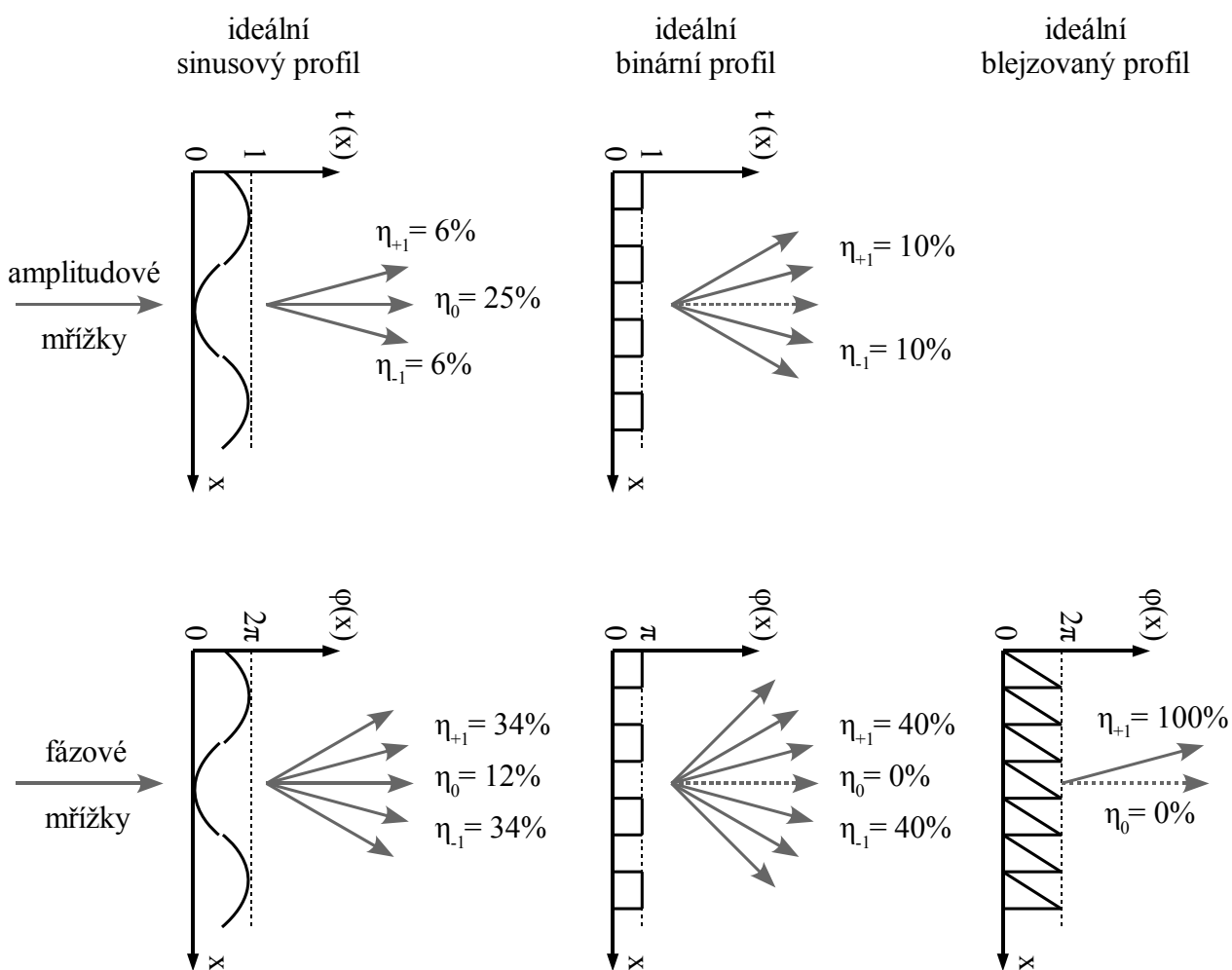
kde I_m je intenzita v m -tém difrakčním řádu a I_i intenzita dopadajícího záření na SLM.

Při speciálním pilovitém průběhu pracovní mřížky SLM je dopadající záření odkloněno pouze do jednoho difrakčního řádu a nevzniká štěpení na další difrakční řády. Proto můžeme graf 2.3 chápat i se započtením pracovní mřížky pilovitého průběhu [4].

Přehled nejdůležitějších profilů pracovní mřížky a jejich teoretické difrakční účinnosti, které mohou při optimální konstrukci dosáhnout, je schematicky znázorněn na obr. 2.7.

Po započtení všech difrakčních jevů vyvstává otázka jak blízko se lze přiblížit k ideálnímu SLM z obr. 2.1. Nezapočítali jsme např. vlivy související se samotnou podstatou prostorové modulace na SLM jako je např. průběh propustnosti v rámci jednoho pixelu. Tento jev souvisí s poměrem šířka pixelu/vzdálenost mezi pixely [7].

V kapitole 2.3 ukážeme, že pomocí prostorové filtrace lze vybrat pouze jeden difrakční řád, i když v pozorovací rovině se záření z jednotlivých difrakčních řádů vzájemně překrývá. Výběr jednoho difrakčního řádu však bude za cenu energetických ztrát. Kolik energie z dopadajícího záření dokážeme soustředit pomocí SLM do jednoho difrakčního řádu závisí také na jeho parametrech. Jedná se např. o počet a velikost pixelů, které ovlivňují efektivitu mnohosvazkové interference. Proto v následující podkapitole uvedeme konkrétní parametry SLM XGA3 CRL OPTO a SLM P512 BOULDER, na kterých budeme v kapitole 4. a 5. experimentálně demonstrovat výsledky získané pomocí počítačové simulace.



Obr. 2.7: Různé průběhy pracovních mřížek SLM s teoretickými hodnotami difrakčních účinností

2.2.3. Parametry prostorových modulátorů světla XGA3 CRL OPTO a P512 BOULDER

Při uplatňování vztahu (2.6) je třeba splnit podmínkou

$$\frac{D^2}{\lambda d} \ll 1, \quad (2.9)$$

kde D je větší rozměr z D_x , D_y . Vztah (2.9) udává podmínku platnosti Fraunhoferovi aproximace skalární difrakční teorie, která je splněna vzhledem k vlnovým délkám optického záření λ pro velké vzdálenosti d a malé rozměry D . Při nesplnění podmínky (2.9) již nelze uplatnit vztah (2.6).

Slabší podmínku

$$\frac{N_F D^2}{4d^2} \ll 1, \quad (2.10)$$

dává Fresnelova aproximace, kde N_F je tzv. Fresnelovo číslo definované levou stranou vztahu (2.9).

Konkrétní hodnoty potřebné pro rozhodnutí, kdy je možno aplikovat závěry skalární difrakční teorie společně s parametry amplitudového SLM XGA3 CRL OPTO a fázového SLM P512 BOULDER podává tab. 2.1.

Modulátor	XGA3 CRL OPTO	P512 BOULDER
Velikost aktivní plochy modulátoru (mm ²)	1,85.10 ¹ x 1,39.10 ¹	7,68 x 7,68
Velikost jednoho pixelu (mm)	1,3.10 ⁻² x 1,0.10 ⁻²	1,37.10 ⁻²
Vzdálenost středů sousedících pixelů (mm)	1,8.10 ⁻² x 1,8.10 ⁻²	1,5.10 ⁻²
Úhlová divergence difraktovaného světla na celém modulátoru dle (2.7) (rad)	3,4.10 ⁻⁵ x 4,5.10 ⁻⁵	7,2.10 ⁻⁵
Úhlová divergence difraktovaného světla na jednom pixelu dle (2.7) (rad)	4,9.10 ⁻² x 6,3.10 ⁻²	4,0.10 ⁻²
Minimální vzdálenost pro platnost Fresnelovy aproximace při difrakci na celé apertuře dle (2.10) (mm)	2,6.10 ³ x 1,8.10 ³	8,2.10 ²
Minimální vzdálenost pro platnost Fraunhoferovy aproximace při difrakci na celé apertuře dle (2.9) (mm)	5,4.10 ⁸ x 3,0.10 ⁸	9,3.10 ⁷
Minimální vzdálenost pro platnost Fresnelovy aproximace při difrakci na jednom pixelu dle (2.10) (mm)	1,7.10 ⁻⁴ x 1,2.10 ⁻⁴	1,8.10 ⁻⁴
Minimální vzdálenost pro platnost Fraunhoferovy aproximace při difrakci na jednom pixelu dle (2.9) (mm)	2,6.10 ¹ x 1,6.10 ¹	3,0.10 ¹

Tab. 2.1: Difrakční vlastnosti SLM XGA3 CRL OPTO a P512 BOULDER

Z hodnot uvedených tab. 2.1 je patrné, že při praktických experimentech lze teorii skalární difrakce použít v obou aproximacích pro difrakci na jednotlivých pixelech pevné mřížky. Pro přesné určení vlivu difrakce na celé apertuře modulátoru musíme použít rigorózní teorii difrakce, především při určování energetických aspektů SLM v blízkém poli modulátoru.

2.3. Fourierovská optika

Hlavní myšlenkou Fourierovské optiky je rozklad postupné vlny $U(x, y, z)$ v jisté zastavovací rovině do spektra rovinných vln. V $z = 0$, označme $U(x, y, 0) \equiv U(x, y)$ a můžeme psát

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \exp[-i 2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y, \quad (2.11)$$

kde $F(v_x, v_y)$ jsou komplexní amplitudy rovinných vln, $\Phi = 2\pi(v_x x + v_y y)$ jejich fáze a

$$\Theta_x = \arcsin(\lambda v_x), \quad \Theta_y = \arcsin(\lambda v_y) \quad (2.12)$$

jsou směrové úhly, pod kterými se vlny šíří. Komplexní amplitudy jednotlivých vln, které určují jejich váhy ve vytvářené superpozici (2.11), jsou dány přímoú FT

$$F(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp[i 2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy. \quad (2.13)$$

2.3.1. Vlastnosti Fourierovy transformace

Fourierova transformace (FT) převádí rozložení komplexní amplitudy v jisté zastavovací rovině do tvaru, který je pro následné zpracování mnohem pohodlnější a výhodnější. Pro zjednodušení zápisu označme Fourierovu transformaci funkce $U(x, y)$ jako $FT\{U(x, y)\}$. Základní vlastnosti FT jsou:

- 1) linearita, která odráží linearitu Helmholtzovy rovnice, jež popisuje prostorový vývoj komplexní amplitudy optické vlny. Operace sčítání (superpozice vln), odčítání a násobení konstantou zůstávají v transformacích zachovány;
- 2) separovatelnost jádra transformace, která umožňuje přepsat dvourozměrnou transformaci na dvě jednorozměrné transformace. Vztah (2.11) nabude tvaru

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \exp(-i 2\pi v_x x) dv_x \right] \exp(-i 2\pi v_y y) \right\} dv_y; \quad (2.14)$$

3) věta o posuvu – posun předmětu v prostoru (x, y) způsobí fázový posuv ve spektrální oblasti (ν_x, ν_y) tedy

$$FT \{U(x-x_1, y-y_1)\} = FT \{U(x, y)\} \exp(-i 2\pi(\nu_x x_1 + \nu_y y_1)); \quad (2.15)$$

4) škálování – je-li $U(x, y)$ škálováno faktory $\Delta x, \Delta y$ pak

$$FT \{U(x/\Delta x, y/\Delta y)\} = |\Delta x \Delta y| F(\Delta x \nu_x, \Delta y \nu_y); \quad (2.16)$$

5) konvoluční teorém – konvoluce funkcí $h(x, y)$ a $U(x, y)$

$$U_o(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_i(x', y') h(x-x', y-y') dx' dy', \quad (2.17)$$

je ekvivalentní násobení ve frekvenční oblasti

$$F_o(\nu_x, \nu_y) = H(\nu_x, \nu_y) F_i(\nu_x, \nu_y), \quad (2.18)$$

kde $FT\{h(x, y)\} = H(\nu_x, \nu_y)$;

$$6) FT \{FT^{-1}\{U(x, y)\}\} = U(x, y); \quad (2.19)$$

7) Fourierova transformace zachovává normu (tzv. Parsevalův teorém [8]) a tudíž energie elektromagnetické vlny lze spočítat jak v prostorové, tak i ve spektrální oblasti dle vztahu

$$\iint_{-\infty}^{\infty} [FT \{|U(x, y)|^2\}] d\nu_x d\nu_y = \iint_{-\infty}^{\infty} |U(x, y)|^2 dx dy. \quad (2.20)$$

Další obsáhlejší informace o vlastnostech FT jsou uvedeny např. v [8] a [9].

2.3.2. Optická přenosová funkce volného prostoru

Tvoří-li dopadající pole libovolná postupná vlna, rozložíme ji dle (2.11) do spektra rovinných vln a sledujeme chování každé rovinné vlny.

Nechť rovinná vlna $U_i(x, y, z)$ v zastavovací rovině $z = 0$ má tvar

$$U_i(x, y, 0) = A \exp(-i(k_x x + k_y y)) \quad (2.21)$$

a po uražení podélné vzdálenosti $z = d$ nabývá tvaru

$$U_o(x, y, d) = A \exp(-i(k_x x + k_y y + k_z d)), \quad (2.22)$$

kde A je komplexní konstanta a

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.23)$$

je vlnové číslo, jehož komponenty určují směr šíření rovinné vlny pod úhly

$$\Theta_x = \arcsin \left(\frac{k_x}{k} \right) \text{ resp. } \Theta_y = \arcsin \left(\frac{k_y}{k} \right). \quad (2.24)$$

Po dosazení (2.21), (2.22) do (2.1) dostaneme funkci propustnosti volného prostoru

$$t(x, y) = \exp(-i k_z d). \quad (2.25)$$

S využitím (2.3), (2.12), (2.23) a (2.24) dostáváme přepis (2.25) do systému prostorových frekvencí a tedy definici optické přenosové funkce volného prostoru

$$H_0(v_x, v_y) = \exp \left[i 2 \pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2 \right)^{1/2} d \right]. \quad (2.26)$$

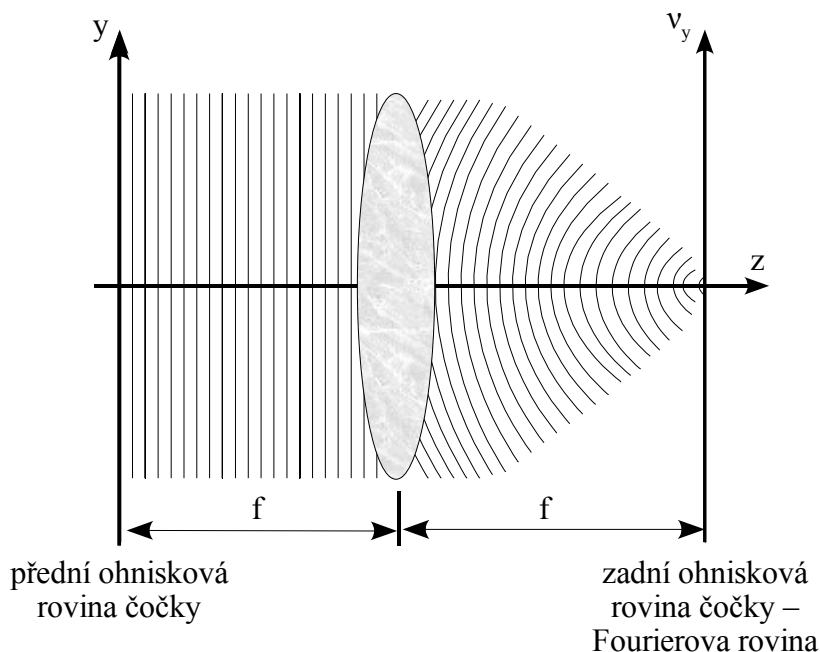
Funkce $|H_0(v_x, v_y)|$ bude rovna jedné když argument exponenciální funkce bude komplexní číslo, což bude platit pouze v případě, že

$$v_x^2 + v_y^2 \leq 1/\lambda^2. \quad (2.27)$$

V opačném případě bude argument exponenciální funkce reálný a bude představovat útlumový faktor. Hodnotu $1/\lambda$ proto můžeme považovat za mezní prostorovou frekvenci, která je přenesena volným prostorem. Vyšší prostorové frekvence odpovídají tzv. evanescentním vlnám, které přenášejí informace o menších detailech než je vlnová délka použitého záření. Tyto vlny jsou odfiltrovány pouhým šířením.

2.3.3. Prostorová filtrace pomocí 4-f systému

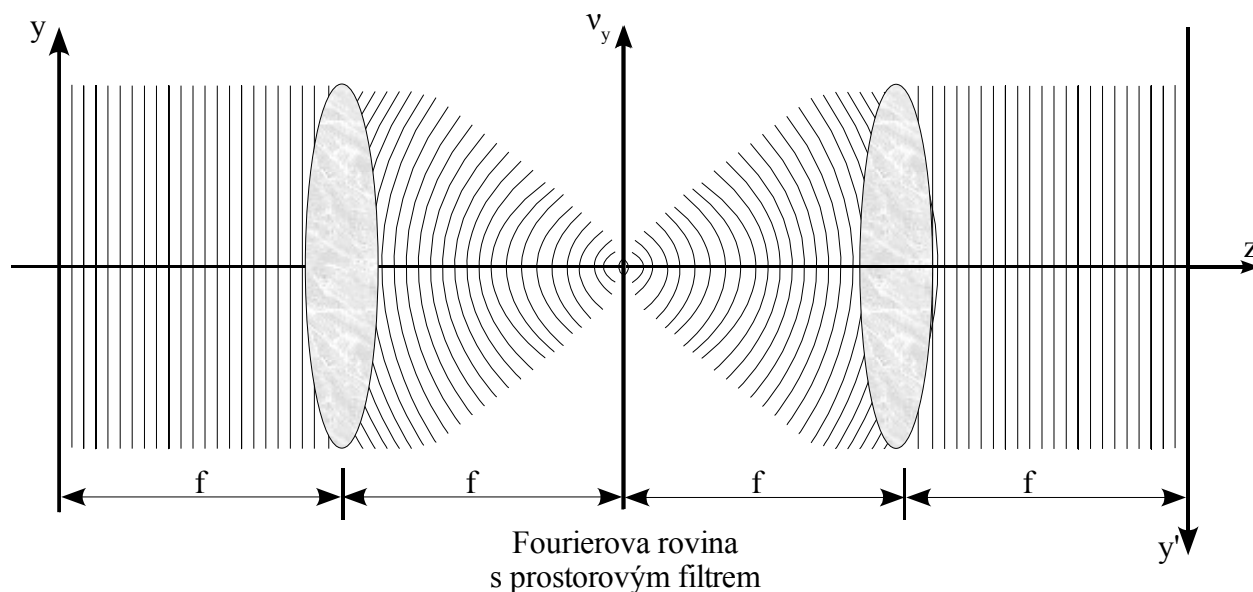
Opticky lze FT provést pomocí jednoduché čočky. Ta fokusuje každou rovinnou vlnu $U(x, y)$ do jednoho bodu zadní ohniskové roviny (obr. 2.8). Proto zadní ohniskovou rovinu čočky nazýváme Fourierovou rovinou, protože v ní dochází k prostorovému oddělení jednotlivých frekvenčních složek.



Obr. 2.8: Optická Fourierova transformace

Fourierovu transformaci složitých funkcí představovaných elektromagnetickou vlnou lze proto získat experimentální optickou cestou prostým změřením rozložení elektromagnetického pole v ohniskové rovině čočky. Tato metoda může získat FT mnohem rychleji než současné numerické metody [10]. Konkrétní zápis matematické funkce do elektromagnetické vlny při realizaci FT optickou cestou lze provádět pomocí SLM.

Ztotožníme-li Fourierovu rovinu s přední ohniskovou rovinou další vložené čočky budeme provádět inverzní Fourierovu transformaci Fourierovy roviny. Pro platnost vzorce (2.11) však musí být argument exponenciální funkce záporný, čehož lze docílit invertováním souřadnicové soustavy tzn. $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. Výsledný dvoučočkový zobrazovací systém, tzv. 4-f systém, má v případě stejných čoček záporné jednotkové zvětšení a je používán k prostorové filtraci Fourierovských komponent pomocí vhodné masky umístěné ve Fourierově rovině (obr. 2.9).



Obr. 2.9: 4 - f systém

Abychom mohli využívat prostorové filtry jednoduchých tvarů (např. kruh, čtverec), musí být prostorové frekvence nesoucí požadované informace jako celek oddělené od prostorových frekvencí odpovídajících nežádoucím jevům (tj. informace z ostatních difrakčních řádů, aberace čoček, ...). Pak prostým vložením jednoduchého prostorového filtru do Fourierovy roviny odseparujeme nežádoucí prostorové frekvence.

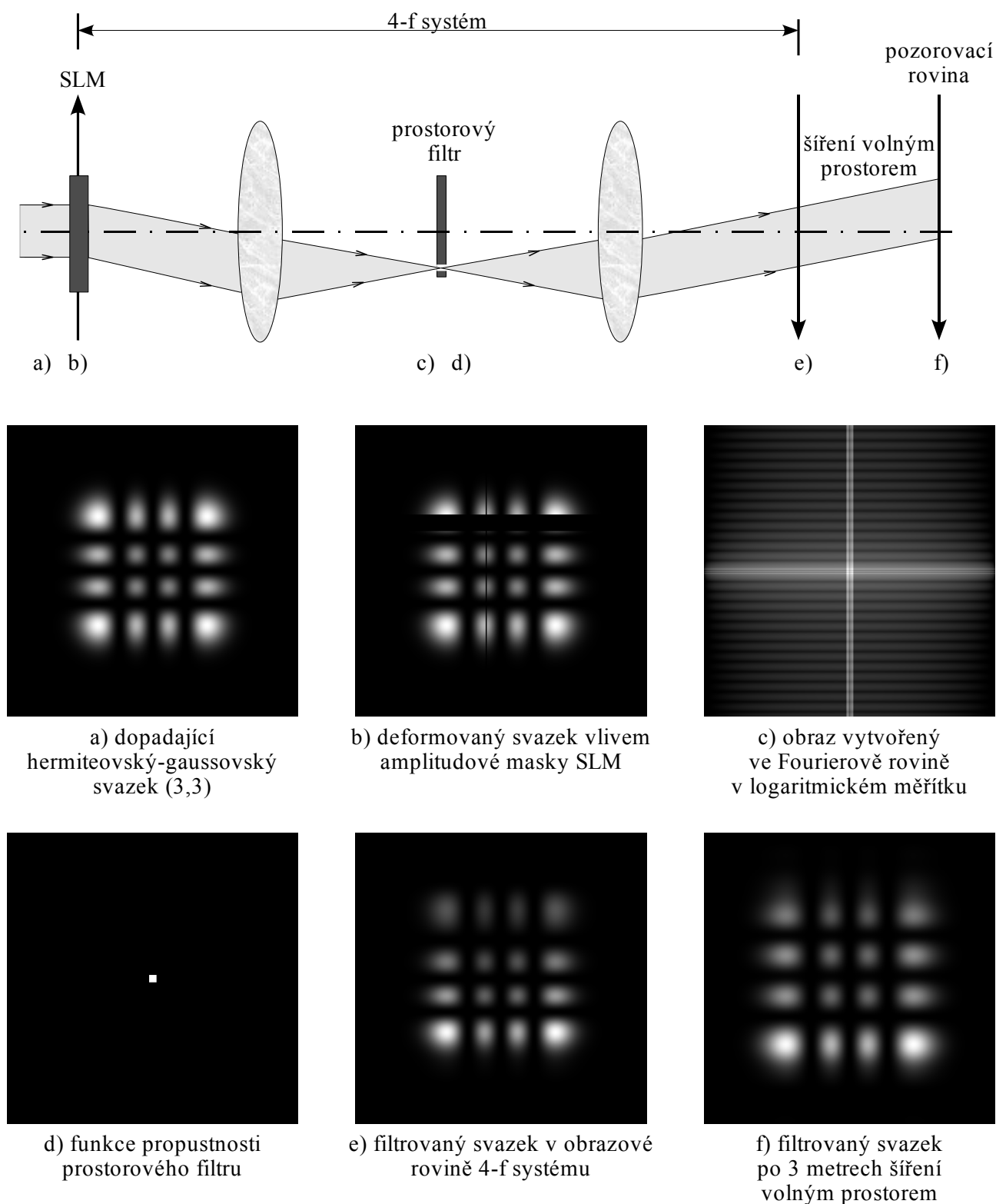
2.3.4. Počítačová simulace prostorové filtrace

Pro větší názornost uvádíme příklad počítačové simulace vyčištění hermiteovského – gaussovského svazku pomocí prostorové filtrace (obr. 2.10). Šíření světla budeme popisovat frekvenční metodou.

Dopadající svazek s průběhem intenzity dle obr. 2.10 a) jsme záměrně znehodnotili dvěma vzájemně kolmými nepropustnými pruhy různé tloušťky (obr. 2.10 b)). Toto znehodnocení se může provést např. amplitudovým SLM.

FT komplexní amplitudy svazku v rovině SLM získáme prostorové spektrum, jehož modul je zaznamenán v logaritmickém měřítku na obr. 2.10 c). Pozorujeme tak čárovou strukturu odpovídající prostorovým frekvencím, které nesou informaci o deformaci svazku. Prostorovou filtrací pomocí filtru s funkcí propustnosti dle obr. 2.10 d) částečně vyčistíme svazek, o čemž se můžeme přesvědčit v obrazové rovině 4f-systému po zpětné FT (obr. 2.10 e)). Opětovnou FT převedeme výsledné pole do systému prostorových frekvencí, kde započteme vliv šíření svazku ve volném prostoru příslušnou

optickou přenosovou funkcí. Zpětnou FT získáme rozložení komplexní amplitudy vyčištěného svazku v pozorovací rovině, tedy ve vzdálenosti 3 metry, s průběhem intenzity dle obr. 2.10 f)).



Obr. 2.10: Simulace prostorové filtrace a volného šíření světla

3. Numerická simulace činnosti modulátoru světla

V následující kapitole představíme podrobněji numerickou stránku simulace činnosti SLM. Podrobněji představíme problémy spojené s digitalizací komplexní amplitudy. Dále určíme rozlišovací schopnost modulátoru z Nyquistova kritéria, jehož nesplnění povede ke známému Moiré efektu, který se často objevuje při simulaci činnosti SLM. V následující podkapitole odvodíme diskrétní Fourierovu transformaci a nastíníme odvození rychlé Fourierovy transformace. Ta je základním stavebním kamenem simulace činnosti SLM a také většiny iteračních algoritmů navrhuje rozdělení funkce propustnosti SLM pro získání požadovaného průběhu komplexní amplitudy v pozorovací rovině.

3.1. Digitalizace komplexní amplitudy

Digitalizací komplexní amplitudy rozumíme převod jejího spojitého průběhu v jisté zastavovací rovině do dvojrozměrné matice, jejíž prvky nazveme pixely. Digitalizace se skládá ze vzorkování (diskretizace v ploše) a následné kvantizace (diskretizace v úrovních). Obě diskretizace jsou již určeny samotnými SLM (tab. 3.1). Zbývá tedy určit jejich dopad na kvalitu zobrazení SLM a omezení, které tyto pevné volby diskretizace s sebou přinášejí.

Modulátor	XGA3 CRL OPTO	P512 BOULDER
Počet pixelů	1024 x 768	512 x 512
Počet úrovní	256	256
Tvar pixelu	obdélníkový	čtvercový

Tab. 3.1: Diskretizace plochy a úrovní SLM XGA3 CRL OPTO a P512 BOULDER

3.1.1. Whittaker – Shannonův vzorkovací teorém

Diskretizací v ploše komplexní amplitudy $U(x, y)$ v rovině SLM přiřazujeme každému pixelu o ploše $\Delta x \Delta y$ právě jednu hodnotu komplexní amplitudy. Ztrácíme tak část prostorového rozložení funkce $U(x, y)$. Diskretizací v úrovních pak převedeme velikost $U(x, y)$ každého pixelu do omezené množiny hodnot, čímž opět ztrácíme část velikostního rozložení $U(x, y)$. Matematicky tento fakt vyjádříme pomocí funkce propustnosti $t_{\text{vz}}(x, y)$, takže výsledná navzorkovaná komplexní amplituda má tvar

$$U_{\text{vz}}(x, y) = t_{\text{vz}}(x, y) U(x, y) = \text{comb}(x/\Delta x) \text{comb}(y/\Delta y) U(x, y), \quad (3.1)$$

kde Δx , Δy jsou rozměry jednoho pixelu SLM a

$$\text{comb}(x/\Delta x) \text{comb}(y/\Delta y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-n\Delta x, y-m\Delta y) \quad (3.2)$$

je tzv. Diracův hřeben, který představuje součet Diracových delta funkcí.

Jelikož diskretizací došlo ke ztrátě některých informací přenášených elektromagnetickou vlnou, určuje Whittaker – Shannonův vzorkovací teorém podmínky, při kterých z funkce $U_{vz}(x, y)$ dostaneme jednoduchou interpolací přesný průběh původní funkce $U(x, y)$. Aplikujeme-li FT na vztah (3.1) dostaneme

$$F_{vz}(v_x, v_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(v_x - \frac{n}{\Delta x}, v_y - \frac{m}{\Delta y}), \quad (3.3)$$

kde $F_{vz}(v_x, v_y)$ a $F(v_x, v_y)$ jsou Fourierovou transformací funkcí $U_{vz}(x, y)$ a $U(x, y)$. Odtud je vidět, že výsledkem je opakující se FT $U(x, y)$ s periodami Δx a Δy . Vynásobení komplexní amplitudy funkcí (3.2) způsobí degradaci jejího Fourierova obrazu pouze za předpokladu, že dochází k jeho překrytí se sousedním Fourierovým obrazem. Z toho plyne, že funkce $U(x, y)$ musí mít takový tvar, aby její odpovídající spektrum bylo nenulové pouze v určité části spektrálního prostoru. Tato podmínka je díky (2.27) splněna automaticky pro všechny elektromagnetické vlny. Započteme-li navíc v případě SLM osvětleného koherentním laserovým zářením ořezání vyšších prostorových frekvencí aperturou modulátoru, dostaneme ještě nižší frekvenční meze, a to [1]

$$v_{x \max} = \frac{D_x}{\lambda d}, \quad v_{y \max} = \frac{D_y}{\lambda d}, \quad (3.4)$$

kde D_x , D_y jsou příčné rozměry apertury SLM a d vzdálenost roviny pozorování od SLM. Ve skutečnosti je nejvyšší přenesená prostorová frekvence prostřednictvím SLM ještě nižší, protože vztah (3.4) platí pro fyzikálně dokonalý systém s homogenně propustnou pupilou.

Druhá podmínka dává do vztahu maximální přenesenou frekvenci SLM a velikost pixelu. Středů jednotlivých Fourierových obrazů funkce $U(x, y)$ musí být minimálně ve vzdálenosti rovné dvojnásobku maximální přenesené prostorové frekvence, tedy

$$v_{Nx} \leq \frac{1}{2 \Delta x} \quad a \quad v_{Ny} \leq \frac{1}{2 \Delta y}. \quad (3.5)$$

Takto definované maximální prostorové frekvence se nazývají Nyquistovy. Získáme z nich maximální frekvenční rozlišovací schopnost SLM, která je uvedena pro He-Ne laser ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) a Δx , Δy představující rozteč jednotlivých pixelů uvedených v tab2.1.

Modulátor	XGA3 CRL OPTO	P512 BOULDER
Nyquistovy frekvence [m^{-1}] (H) x (V)	$2,8 \cdot 10^4 \times 2,8 \cdot 10^4$	$3,3 \cdot 10^4 \times 3,3 \cdot 10^4$
Vzdálenost, kdy $v_{x \max} = v_{Nx}$ [m]	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$
Vzdálenost, kdy $v_{y \max} = v_{Ny}$ [m]	$7,9 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$

Tab. 3.2: Maximální prostorové frekvence pro SLM XGA3 CRL OPTO a P512 BOULDER

Při reálném vzorkování má však vzorkovaný obraz konečnou velikost a vzorkovací impulsy nejsou Diracovy delta funkce, ale mají určitý tvar a šířku. Proto ideální vzorkování (3.1) přepíšeme na

$$U_{\text{vz}}(x, y) \rightarrow U_{\text{vz}}(x_n, y_m), \quad (3.6)$$

kde

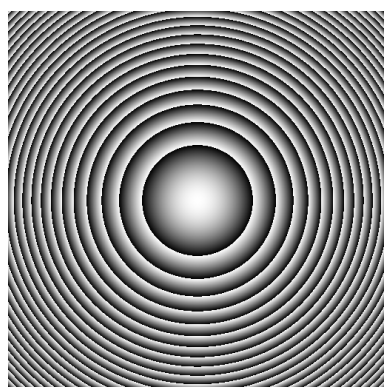
$$x_n = n \Delta x, \quad y_m = m \Delta y, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.7)$$

a Diracův hřeben je nahrazen funkcí o šířce odpovídající jednomu pixelu. Reálné vzorkování tedy na rozdíl od ideálního (3.1) způsobuje určité rozostření funkce $U_{\text{vz}}(x, y)$.

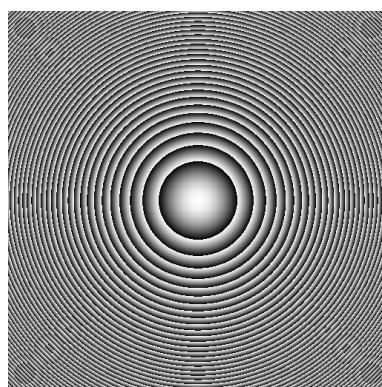
3.1.2. Moiré efekt

Nyquistovu podmínku (3.5) můžeme interpretovat také tak, že vzorkovaná komplexní amplituda nesmí obsahovat struktury o jemnějších detailech než je dvojnásobek Nyquistovy frekvence. Při nedodržení této podmínky není splněn Whittaker – Shannonův vzorkovací teorém a vzniká efekt zvaný aliasing nebo také moiré efekt, kterému se v časové oblasti říká stroboskopický jev [9]. Moiré efekt vyvolává vznik struktur, které se ve spojitěm průběhu funkce vůbec nevyskytují.

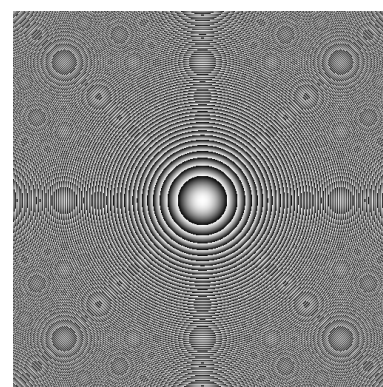
Chceme-li např. simulovat na fázovém SLM čočku o ohniskové vzdálenosti f , bude mít jeho funkce propustnosti průběh soustředných kroužků, které se budou zředňovat v závislosti na její ohniskové vzdálenosti (viz kapitola 5.2.2). Na obr. 3.1 vidíme, že při krátkých ohniskových vzdálenostech se hustota kroužků zředňuje tak prudce, že se na okrajích výsledné funkce propustnosti fázového SLM ($\Delta x = \Delta y = 15 \text{ } \mu\text{m}$) objevují zcela jiné struktury než jsou koncentrické kroužky s jedním středem. Proto pro simulaci čoček o krátkých ohniskových vzdálenostech musíme průběh fáze omezit na oblast, ve které je splněna podmínka (3.5) (tzn. vložit prostorový filtr dolní propustnosti, který propouští pouze prostorové frekvence soustředující se kolem středu), čímž ovšem nevyužijeme celou plochu SLM. Další omezení moiré efektu je i v důsledku reálného vzorkování, které také působí jako prostorový filtr vysokofrekvenčních složek obsažených v komplexní amplitudě.



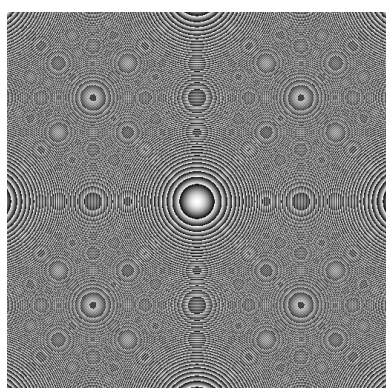
Simulace průběhu fáze
čočky o ohniskové
vzdálenosti 1000 mm



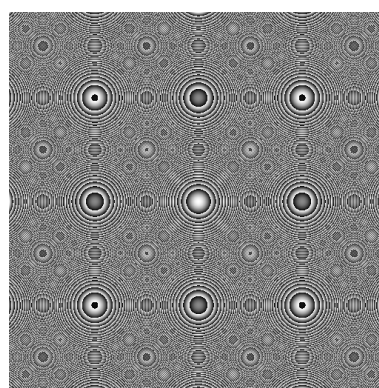
Simulace průběhu fáze
čočky o ohniskové
vzdálenosti 500 mm



Simulace průběhu fáze
čočky o ohniskové
vzdálenosti 200 mm



Simulace průběhu fáze
čočky o ohniskové
vzdálenosti 100 mm



Simulace průběhu fáze
čočky o ohniskové
vzdálenosti 50 mm

Obr. 3.1: Moiré efekt fázových masek SLM simulujících čočky o různých ohniskových vzdálenostech

3.2. Numerická Fourierova transformace

Zavedení diskrétní Fourierovy transformace, která umožňuje počítat FT funkcí, které není možno zapsat analyticky, s sebou přináší otázku s jakou rychlostí dostaneme požadovaný výpočet. Přímé počítání diskrétní FT definované v první části této kapitoly se ukázalo časově náročné. Byly hledány možnosti optimalizace rychlosti výpočtu. Jako první na tuto skutečnost upozornil už Gauss v roce 1805, který interpoloval astronomické výpočty pro zjištění dráhy asteroidu a navrhl určitá zlepšení pro výpočet DFT [11]. Dalším významným krokem byly práce Danielsona a Lanczose z let 1942, kteří zjistili, že počet operací násobení se vlivem faktorizace opakujících se členů může mnohonásobně zmenšit. Jejich výsledky jednorozměrné FT však díky omezené rychlosti tehdejších počítačů nebyly zdaleka tak překvapivé: „Použitím těchto vylepšení bude přibližný čas pro počítání Fourierovy transformace 10 minut pro 8 bodů, 25 minut pro 16 bodů, 62 minut pro 32 bodů a 140

minut pro 64 bodů!“([12], část I, strana 366). Konečná verze FT (s přívěskem rychlá - FFT) vzešla z prací J. W. Cooley a J. W. Tukeye až v roce 1965 [13] a je stále v mnoha případech nejrychlejším a nepoužívanějším algoritmem pro výpočet FT [8].

3.2.1. Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace (dále jen DFT) mapuje diskrétní úrovně $U_{vz}(x_n, y_m)$ na její diskrétní úrovně spektra $F_{vz}(v_{x_k}, v_{y_l})$, kde

$$v_{x_k} = \frac{k}{N \Delta x}, \quad v_{y_l} = \frac{l}{M \Delta y}, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} \quad \text{a} \quad -\frac{M}{2} \leq l \leq \frac{M}{2}. \quad (3.8)$$

Při extrémních hodnotách indexů k a l v (3.8) dostaneme velikosti Nyquistových frekvencí (3.5), takže zmíněné vzorkování splňuje Whittaker – Shannonův vzorkovací teorém. Dosazením (3.7) a (3.8) do (2.13) dostaneme

$$F_{vz}(v_{x_k}, v_{y_l}) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_{vz}(x, y) \exp[i 2 \pi (x v_{x_k} + y v_{y_l})] dx dy \approx \Delta x \Delta y F_D(v_{x_k}, v_{y_l}), \quad (3.9)$$

kde

$$F_D(v_{x_k}, v_{y_l}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} U_{vz}(x_n, y_m) \exp[i 2 \pi (\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M})] \quad (3.10)$$

je dvojrozměrná diskrétní Fourierova transformace navzorkované komplexní amplitudy (3.6). Vztah (3.10) tedy mapuje $N \cdot M$ komplexních čísel z prostorové roviny na $N \cdot M$ komplexních čísel frekvenční roviny, protože hodnoty transformované komplexní amplitudy příslušející kladné a záporné Nyquistově frekvenci nejsou nezávislé.

Odečteme-li od sebe dvě po sobě jdoucí hodnoty prostorových frekvencí v (3.8), získáme velikost vzorkování ve frekvenční rovině $\Delta v_x, \Delta v_y$, tedy

$$\Delta v_x = \frac{1}{N \Delta x}, \quad \Delta v_y = \frac{1}{M \Delta y}. \quad (3.11)$$

Dosazením (3.10) a (3.11) do (2.11) a stejným postupem jako v (3.9) se zanedbáním faktoru $1/\Delta v_x \Delta v_y$ dostaneme definici inverzní DFT

$$U_{vz}(x_n, y_m) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F_D(v_{x_k}, v_{y_l}) \exp[-i 2 \pi (\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M})], \quad (3.12)$$

kde jsme z důvodů podobnosti s definicí přímé DFT využili periodicity (3.10) v indexu n, m s periodami N, M a posunuli průběhy indexů k a l .

Tento krok umožňuje vytvořit jeden počítačový program, který pouhou změnou znaménka v argumentu exponenciální funkce a přidáním či odebráním faktoru $1/NM$ zajistí výpočet přímé či zpětné DFT. Všechny vlastnosti spojité Fourierovy transformace uvedené v kapitole 2.3.1 se dají zavést i pro DFT. Užitím vlastnosti o separovatelnosti jádra transformace spočítáme počet operací, které by počítačový program počítající DFT musel provádět. Pro dvojrozměrnou DFT se jedná o NM operací násobení a $(N-1)(M-1)$ operací sčítání, které se provádějí pro NM bodů. Celkem tak dostáváme

$$\text{počet operací}_{DFT} = (NM)^2 + NM[(N-1)(M-1)]. \quad (3.13)$$

Chceme-li např. provést dvojrozměrnou DFT na SLM typu P512 BOULDER s předpokladem, že délka jedné operace trvá počítačovému CPU desetinu mikrosekundy, dostaneme celkový výsledek zhruba za čtyři hodiny. Výsledek simulace prostorové filtrace pomocí SLM bychom dostali za 8 hodin a výsledky iteračních algoritmů počítajících rozložení fáze na SLM, které např. šestkrát počítají FT, až za celý den. Z toho je patrné, že k simulaci činnosti SLM je použití DFT prakticky nemožné.

3.2.2. Rychlá Fourierova transformace

Základní kroky vedoucí k redukci času výpočtu FT je minimalizace počtu násobení, neboť na všech výpočetních systémech je násobení časově náročnější než sčítání, což platí obzvláště pro komplexní čísla charakterizující komplexní amplitudu. Celkovou redukci času FT načrtneme ve třech krocích.

První krok redukce výpočetního času FT

Označíme-li v (3.10)

$$W^{kn} = \exp\left(\frac{i2\pi}{N}\right)^{kn}, \quad W^{lm} = \exp\left(\frac{i2\pi}{M}\right)^{lm}, \quad (3.14)$$

můžeme si všimnout, že W^{kn} , W^{lm} jsou mocniny konstantních komplexních čísel periodické v indexech kn resp. lm s periodami N resp. M . Můžeme tedy počítačovému programu zadat podmínku, aby při rovnosti $kn = N$ resp. $lm = M$ nevyčísloval hodnoty (3.14) a neprováděl násobení, protože by násobil jedničkou. Tato redukce se projevuje tím výrazněji, čím více jsou součiny kn resp. lm schopny dát periodu N resp. periodu M , tedy čím větší je počet vstupních dat.

Druhý krok redukce výpočetního času FT

Podrobným rozepsáním výrazu (3.10) bychom zjistili, že některé dílčí výsledky násobení se mnohokrát opakují. Např. pro $N = M = 8$ vyjde pro jisté hodnoty indexů k, l, m , a n

$$U_{vz}(x_{n=2}, y_{m=2}) W^{(k=2) \cdot (n=2)} W^{(l=2) \cdot (m=2)} = U_{vz}(x_{n=2}, y_{m=2}) W^{(k=6) \cdot (n=2)} W^{(l=6) \cdot (m=2)} = -U_{vz}(x_{n=2}, y_{m=2}). \quad (3.15)$$

Tato dílčí násobení se tedy mohou provádět pouze jednou, což vede k opětovné redukci času.

Třetí krok redukce výpočetního času FT

Podle Danielsonovy – Lanczosovy věty je možno rozložit DFT na součet dvou DFT poloviční délky, z nichž jedna je tvořena lichými sumačními indexy a druhá sudými sumačními indexy. Tento princip platí rekurzivně, a proto po každém rozdělení DFT můžeme přechíslovat indexy dílčích DFT a opět je jednotlivě rozdělit dle Danielsonovy – Lanczosovy věty. Postupujeme tak do chvíle, kdy již nemůžeme dále přechíslovávat sumační indexy, tedy kdy dostaneme z poslední rozdělené DFT pouze součet dvou prvků. Vysvětlení Danielsonovy – Lanczosovy věty provedeme pro jednorozměrnou DFT, kde výraz (3.10) přepíšeme na

$$F_D(v_{x_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} U_{vz}(x_n) \exp[i 2\pi \frac{kn}{N}] = \sum_{n=0}^{N-1} U_{vz}(x_n) W^{kn}. \quad (3.16)$$

Tento výraz dále rozepíšeme jako

$$\begin{aligned} F_D(v_{x_k}) &= [U_{vz}(x_0) W^0 + U_{vz}(x_2) W^{2k} + \dots + U_{vz}(x_{N-2}) W^{(N-2)k}] + \\ &+ W^k [U_{vz}(x_1) W^0 + U_{vz}(x_3) W^{2k} + \dots + U_{vz}(x_{N-1}) W^{(N-2)k}] = \\ &= F_D^{sudé}(v_{x_k}) + W^k F_D^{liché}(v_{x_k}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde jsme původní DFT rozdělili na transformaci dvou funkcí o poloviční délce a faktorizovali pro lichou DFT společný člen W^k . Pomocí rekurzivního opakování Danielsonovy – Lanczosovy věty rozdělíme DFT až na nejkratší možné dílčí DFT, které nakonec budou odpovídat pouze jedné hodnotě jisté komplexní amplitudy (tzv. bodová transformace)

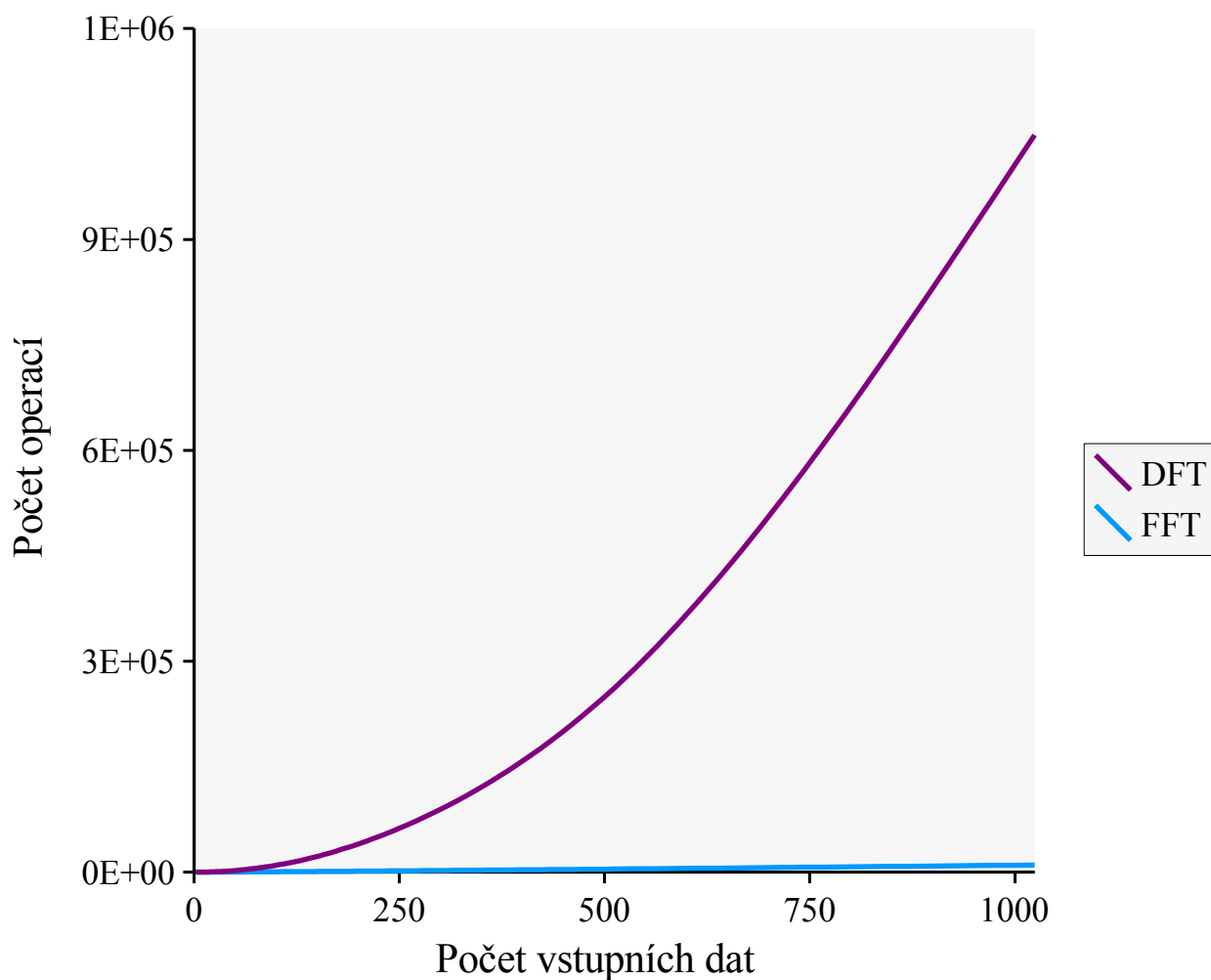
$$F_D^{liché\ sudé\ liché\ liché\ \dots\ sudé}(v_x) = U_{vz}(x_{?}), \quad (3.18)$$

kde otazník znamená, že tato hodnota přísluší neznámému indexu n . Následným sčítáním nejkratších DFT a jejich násobení W -čísly si vytvoříme řadu mezisoučtů, které využijeme několikrát, a tím nejvíce redukuje čas potřebný pro vyčíslení DFT.

Zbývá ještě říci, že abychom nemuseli provádět postupný složitý rozklad DFT s přechíslováním indexů dle Danielsonovy – Lanczosovy věty, použijeme bit zápisu indexu n (m) a ihned dostaneme číslo indexu, který je v (3.18) reprezentován otazníkem [8].

Hlavní redukce FFT spočívá tedy v tom, že všechny stejné mezisoučty počítá co možná nejméně. Zároveň si však výše zmíněné schéma klade podmínku, že počet vstupních hodnot musí být mocninou dvou, abychom mohli využít rekurzivní vlastnosti Danielsonovy – Lanczosovy věty.

Výsledné srovnání počtu operací pro jednorozměrné DFT a FFT ukazuje graf. 3.1. Vlastní program pro počítání FFT byl naprogramován v jazyce C a je obsahem přílohy 1.



Graf 3.1: Počet operací DFT a FFT v závislosti na počtu vstupních dat

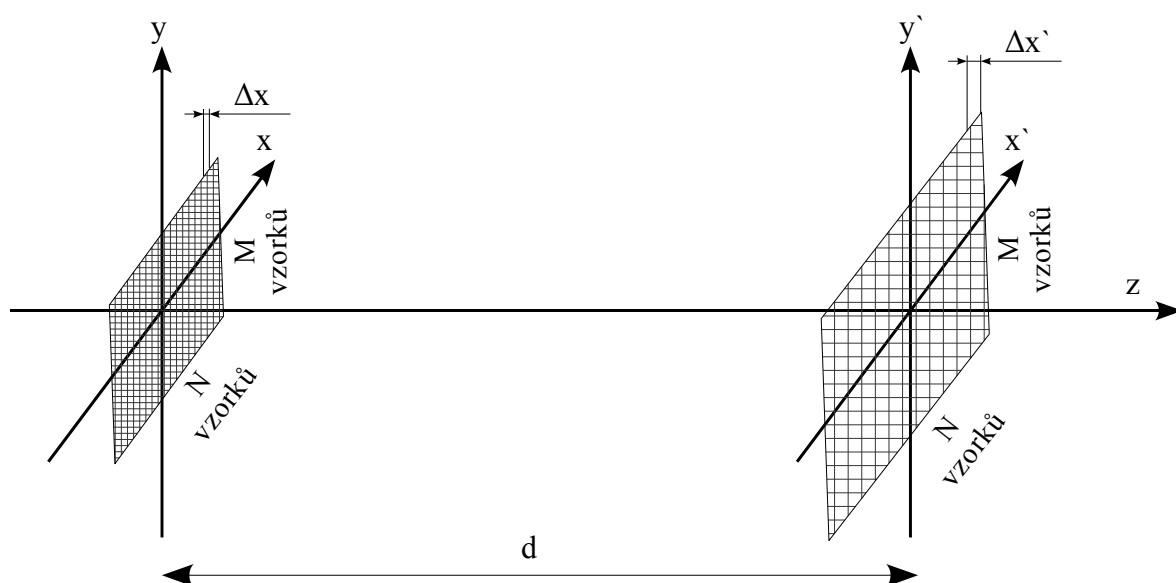
3.3. Omezení při simulaci činnosti prostorového modulátoru

3.3.1. Spojitost mezi vzorkováním ve vstupní a výstupní rovině

Metody popisu šíření světla při zadaném hraničním rozdělení komplexní amplitudy v rovině (x, y) využívají pro výpočet rozdělení komplexní amplitudy v zastavovací rovině (x', y') FFT. Existuje tedy přímá spojitost mezi vzorkováními $(\Delta x, \Delta y)$ v rovině (x, y) a $(\Delta x', \Delta y')$ v rovině (x', y') , která se s využitím vztahů (3.11) a (2.12) запиše jako

$$\Delta x' = \frac{\lambda d}{N \Delta x}, \quad \Delta y' = \frac{\lambda d}{M \Delta y}, \quad (3.19)$$

kde d je vzdálenost mezi rovinami, λ vlnová délka použitého záření a N, M počet vzorků ve vstupní rovině ve směru osy x a osy y (obr. 3.2).

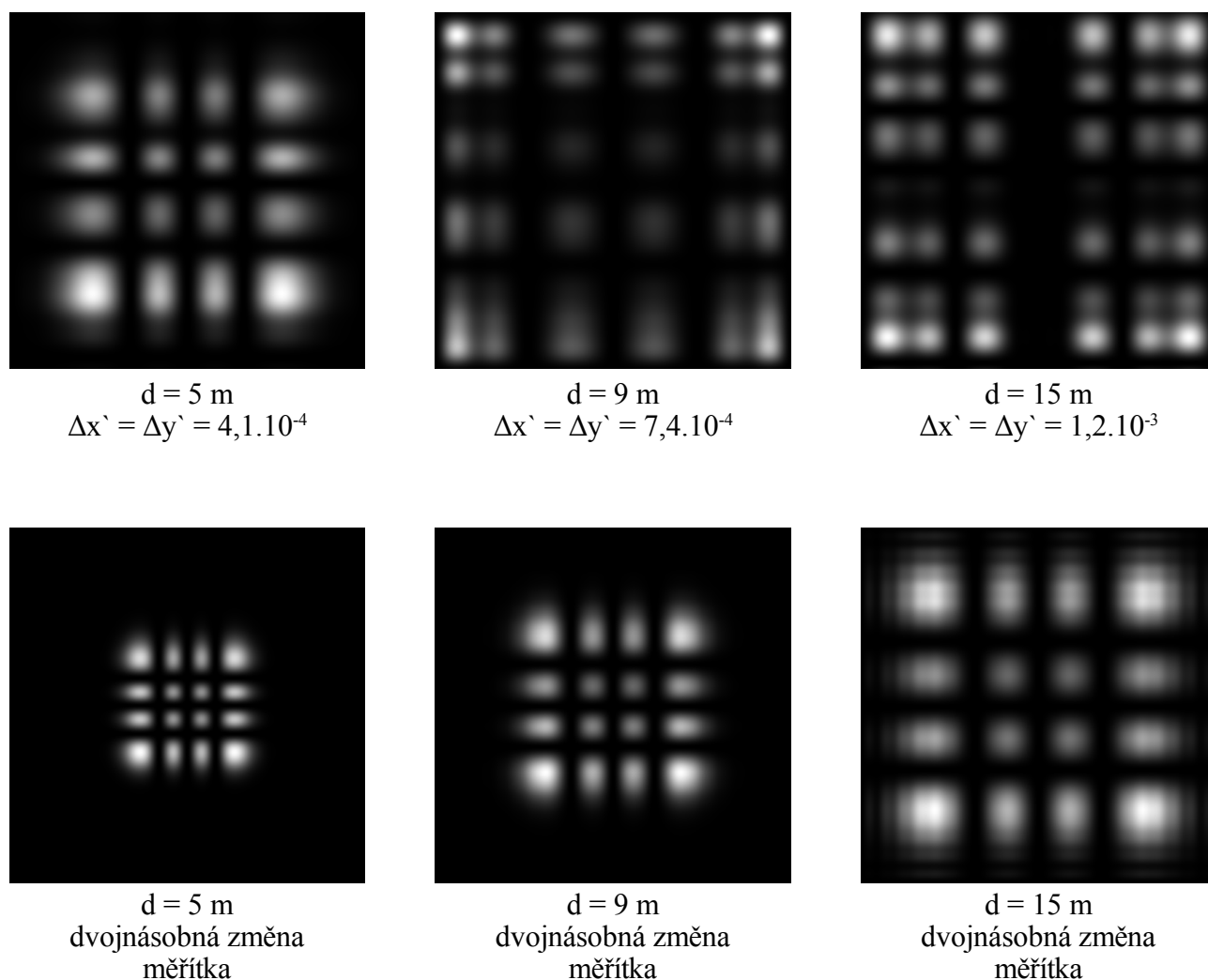


Obr. 3.2: Souvislost mezi vzorkováním ve vstupní a výstupní rovině při použití FFT

Tato souvislost má velice zásadní dopad na přesnost jakékoliv simulace činnosti SLM využívající FFT. SLM svou konstrukcí již pevně stanovuje počet vzorků a vzorkování, které je na něm prováděno. Pro konkrétní vzdálenosti d výstupní roviny je třeba spočítat vzorkování výstupní roviny $\Delta x', \Delta y'$ a z toho určit velikosti odpovídajících detailů, které ve zvolené rovině můžeme pozorovat. Protože FFT mapuje NM bodů vstupní roviny na NM bodů výstupní roviny, bude velikost pozorovaného obrazu $N\Delta x' M\Delta y'$. Požadujeme-li po počítačovém programu, aby nám vykreslil menší část plochy obrazu, můžeme dostat i zcela zkreslené výsledky. Pro názornost uvádíme obr. 3.3, který

zachycuje vzhled svazku z obr. 2.10 ve větších vzdálenosti d a zároveň udává velikost vzorkování ve výstupní rovině dle (3.19). Všechny obrázky v prvním řádku jsou nakreslené pro stejnou velikost obrazové roviny - tedy ve stejném měřítku. V druhém řádku obrázku jsme pro porovnání využili vlastnosti škálování měřítka FT (strana 14) a přepočítli svazek na plochu dvojnásobně většího stínítka.

Souvislost měřítek vstupní a výstupní roviny také zabraňuje, abychom mohli spočítat velikost komplexní amplitudy kdekoliv ve výstupní rovině a správně určili např. Strehlovo kritérium. Proto standardní programy používají k vyčíslení komplexní amplitudy (2.2) kromě FFT také metodu přímého integrování, která vypočte velikost komplexní amplitudy, ve kterémkoliv bodě. Děje se tak však na úkor rychlosti programu a navíc v jednom kroku dá tato metoda výsledek pouze pro jeden bod, kdežto FFT dává všechny výsledky zároveň [5].



Obr. 3.3: Souvislost mezi volbou velikostí výstupní roviny ve vzdálenosti d a pevným vzorkováním FFT

Kromě uvedeného algoritmu pro počítání FFT od autorů Cooleyho a Tukeyho [13], který musí mít počet vstupních dat roven mocnině dvou, existují i algoritmy pro počítání FFT pro libovolný počet dat, které mohou být i rychlejší. Jedná se především o případy, kdy vstupní data nejsou komplexní čísla, ale reálná (kosinová transformace nebo tzv. sloučený algoritmus), kdy je počet vstupních dat malý (algoritmus s prvočíselným rozkladem při počtu dat do 16) nebo kdy na vstupní data jsou kladeny speciální požadavky jako např. při simulaci činnosti kvantových počítačů (např. [8], [14], [15], [16]).

3.3.2. Popis vlastního programu pro simulaci činnosti modulátoru

Při simulaci činnosti SLM vlastním programem jsme nezahrnuli jevy spojené s difrakcí světla na mřížce modulátoru. Nepočítáme tedy s vytvořením difrakčních řádů (viz kapitola 2.2), které jsou při reálných experimentech vždy přítomny. Proto abychom získali požadované rozdělení komplexní amplitudy pomocí vhodné úpravy funkce propustnosti SLM (2.1), musíme směřovat záření ovlivněné modulovanou funkcí propustnosti SLM mezi záření sousedních difrakčních řádů. Jedině tak zabráníme jejich vzájemnému překryvu. Jak později uvidíme, prakticky provedeme toto směřování u fázového SLM „přidáním“ fáze klínu nebo u amplitudového SLM šikmou referenční rovinou vlnou.

Dalším zanedbáním v numerické simulaci činnosti SLM byl vliv aberací jednotlivých čoček 4 f systému. To se projeví především na třírozměrné lokalizaci světla v kapitole 5.

4. Tvarování gaussovského svazku prostřednictvím prostorového modulátoru

V následující kapitole provedeme popis důležité aplikace SLM – prostorové tvarování gaussovského svazku na nestandardní hermiteovské - gaussovské (dále HG svazky) nebo laguerreovské – gaussovské svazky (dále LG svazky). Tyto svazky nacházejí uplatnění v klasických aplikacích ve vláknové, rezonátorové či laserové optice, ale také uplatnění v moderních odvětvích optiky. Jde např. o singulární optiku, kdy pomocí LG svazků vytváříme „světelné“ víry s nenulovým orbitálním momentem hybnosti, které se dají použít pro přenos informace či k manipulaci s mikročásticemi [17]. Např. STED mikroskopie (Stimulated-emission-depletion microscopy), která je schopna pozorovat objekty pod difrakční optickou limitu 200 nm při osvětlení pozorovaného objektu LG svazkem [18].

Nejdříve uvedeme matematický popis komplexní amplitudy HG a LG svazku a popíšeme jak se na SLM adresuje modulace funkce propustnosti $t(x, y)$ pro přetvarování svazku. Dále uvedeme experimentální uspořádání pro konverzi gaussovského svazku pomocí SLM XGA3 CRL OPTO a výsledky srovnáme s počítačovou simulací.

4.1. Prostorově modulované gaussovské svazky

Prostorový vývoj komplexní amplitudy $U(x, y, z)$ je popsán Helmholtzovou rovnicí [3]

$$(\Delta + k^2) U(x, y, z) = 0, \quad (4.1)$$

kde $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je Laplaceův operátor a k vlnové číslo (2.23). V oblasti blízko optické osy můžeme rovinnou vlnu aproximovat vlnou paraxiální, o které předpokládáme, že její hlavní část energie bude soustředěna kolem optické osy. Proto ji nazveme optickým svazkem. Její konstrukci provedeme tak, že vyjdeme z rovinné vlny $U = A \exp(-ikz)$, kterou považujeme za nosnou vlnu a modulujeme její komplexní obálku tak, že z ní vytvoříme pomalu se měnící funkci polohy $A(x, y, z)$. Komplexní amplituda vlny pak je

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(-ikz). \quad (4.2)$$

Dosazením do (4.1) dostaneme rovnici pro prostorový vývoj pomalu se měnící komplexní obálky A , které se někdy říká paraxiální Helmholtzova rovnice a zapisuje se ve tvaru

$$\Delta_T A - i 2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (4.3)$$

kde $\Delta_r \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ je transversální Laplaceův operátor. Řešením této rovnice jsou prostorově modulované gaussovské svazky, jejichž komplexní amplitudu můžeme obecně zapsat jako [19]

$$U_l(\vec{r}, z) = \psi_l(\vec{r}) \gamma_l(z) \exp[-ik(z + \frac{\vec{r}^2}{2R})], \quad (4.4)$$

$$\gamma_l(z) = \exp[-i(b_l + 1) \arctg(\frac{z}{z_0})],$$

kde funkce $\psi_l(\vec{r})$, a konstanta b_l závisí na volbě souřadného systému,

$$R = z(1 + \frac{z_0^2}{z^2}) \quad (4.5)$$

je poloměr křivosti vlnoplochy svazku a parametr z_0 je tzv. Rayleighova vzdálenost.

Modulační funkce $\psi_l(\vec{r})$ je nalezena dosazením (4.4) do (4.3). Za předpokladu, že $\psi_l(\vec{r}) = X(x) Y(y) Z(z)$ dostaneme tzv. hermiteovské – gaussovské svazky

$$\psi_l(x, y) = A_{l,m} [\frac{W_0}{W}]^m H_l[\frac{\sqrt{2}x}{W}] H_m[\frac{\sqrt{2}y}{W}] \exp[-\frac{x^2 + y^2}{W^2}], \quad (4.6)$$

$$b_l = l + m$$

a za předpokladu $\psi_l(\vec{r}) = R(\varrho) \Phi(\varphi) Z(z)$ dostaneme tzv. laguerreovské – gaussovské svazky

$$\psi_l(\rho, \varphi) = A_{l,m} [\frac{\sqrt{2}|\rho|}{W}]^m L_l^m[\frac{2\rho^2}{W^2}] \exp[-\frac{\rho^2}{W^2}] \exp(\pm im\varphi), \quad (4.7)$$

$$b_l = 2l + m.$$

V předešlých vzorcích jsme zavedli poloměr svazku

$$W = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \quad (4.8)$$

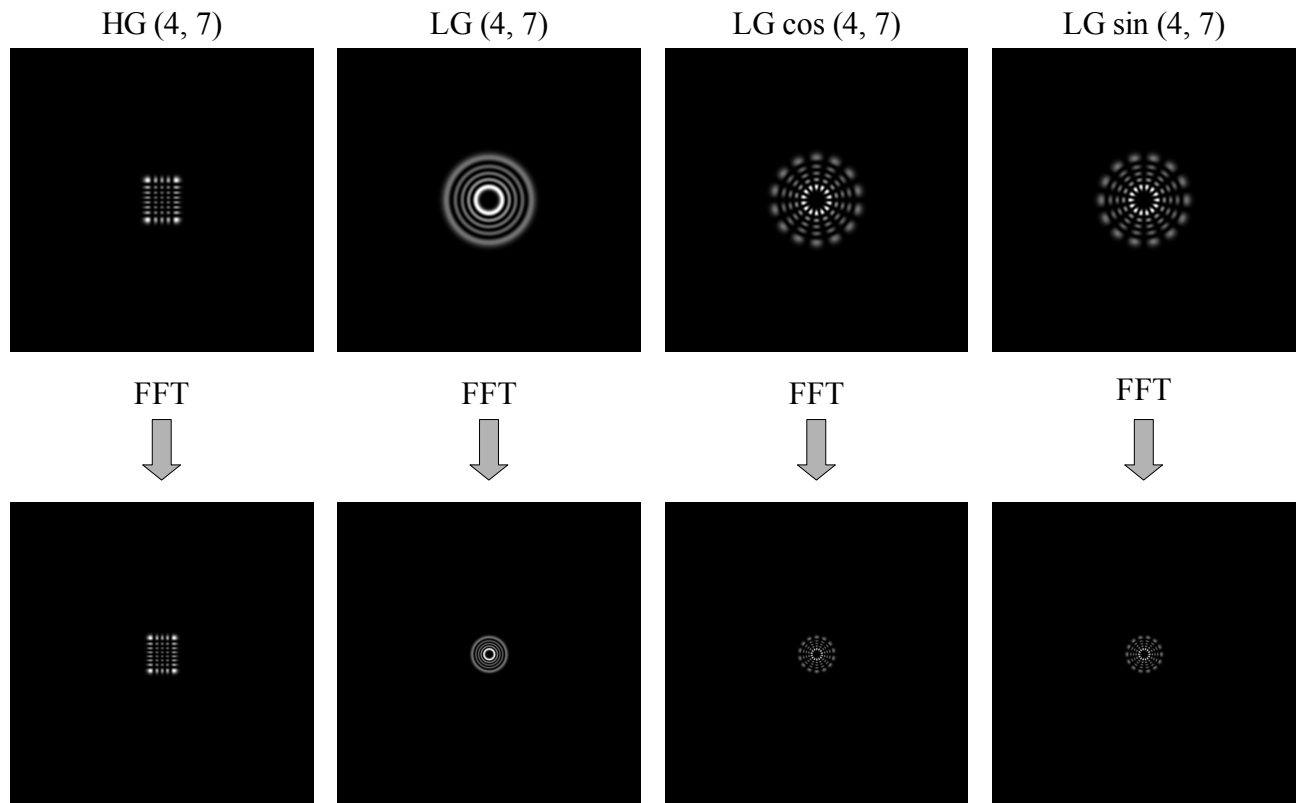
určující šířku svazku, v níž se šíří většina energie, poloměr svazku v rovině $z = 0$ W_0 , a indexy l, m určují řád Hermiteových polynomů H nebo Laguerreových polynomů L [20]. V obou případech pro $l = m = 0$ přecházejí svazky na jednoduchý gaussovský svazek.

V některých případech se udává i modifikovaný typ LG svazků, kdy komplexní číslo ve tvaru exponenciální funkce ve vztahu (4.7) $\exp(\pm im\varphi)$, přechází na reálné $\cos(\pm m\varphi)$ (tzv. LG cos svazky) nebo $\sin(\pm m\varphi)$ (tzv. LG sin svazky) [19]. Složením modifikovaných LG svazků dostáváme jeho exponenciální tvar, což si můžeme všimnout na obr. 4.1.

Z volby souřadnicového systému je patrné, že HG svazky budou symetrické dle souřadnicových os a LG svazky symetrické osově. Tuto vlastnost si podrží nejen při šíření volným prostorem, ale i po průchodu čočkou nebo klínem. Má-li HG či LG svazek v předmětové ohniskové rovině čočky o ohniskové vzdálenosti f parametry W , $R = \infty$, bude mít v její ohniskové rovině stejný tvar ovšem s pozměněnými parametry [3]

$$W_{FT} \approx \frac{\lambda f}{\pi W}, \quad R_{FT} = \infty. \quad (4.9)$$

Tento vztah můžeme považovat za analogii ke vztahu (3.19) pro $d = f$, a proto gaussovské svazky jsou prostorově podobné svým fourierovským spektrům (obr. 4.1).



Obr. 4.1: Prostorová podobnost svazků gaussovského typu s jejich fourierovskými obrazy

4.2. Tvarování gaussovského svazku prostřednictvím amplitudového modulátoru

Předpokládejme, že funkce propustnosti SLM je rovna komplexní amplitudě HG svazku, tedy

$$t(x, y) = U_{lHG}(x, y, z = 0). \quad (4.10)$$

Osvětlením tohoto SLM gaussovským svazkem

$$U_G(x, y, z = 0) = A_{0,0} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2}\right), \quad (4.11)$$

který jsme odvodili z (4.4) v rovině $z = 0$, položením indexů l, m nule, dostaneme výslednou komplexní amplitudu

$$U_o(x, y) = U_G(x, y) \cdot t(x, y) = U_G(x, y) \cdot U_{lHG}(x, y). \quad (4.12)$$

Volbou jednotkové komplexní obálky $A_{0,0}$ a velkého poloměru gaussovského svazku W_0 bude jeho komplexní amplituda rovna jedné a pravá strana vztahu (4.12) bude rovna funkci propustnosti SLM, tedy přímo komplexní amplitudě HG svazku. Vystává však otázka, zda lze zapsat celou komplexní amplitudu HG svazku (tedy jeho fázi i amplitudu) do funkce propustnosti SLM.

V kapitole 2. jsme definovali, že propustnost amplitudového SLM je pozitivní reálná funkce, z čehož vyplývá, že nedokáže zachytit přímo fázové změny. Zapsání fáze do reálné funkce propustnosti amplitudového SLM proto musíme provést nepřímo, a to pomocí interference s rovinnou vlnou. Tento postup zviditelnění amplitudy i fáze ve funkci propustnosti SLM nazveme holografické kódování.

4.2.1. Zápis a rekonstrukce hologramu

Holografické kódování zahrnuje úplný záznam a rekonstrukci optických vln prostřednictvím vhodného média, hologramu, kterým může být SLM. Zápisem rozumíme interferenci optické vlny $U_o(x, y)$, kterou nazveme předmětovou, s pomocnou vlnou $U_r(x, y)$, kterou nazveme referenční. Průběh intenzity interferenční obrazce v rovině $z = 0$ je zakódován do funkce propustnosti SLM, takže pro koherentní záření dostáváme

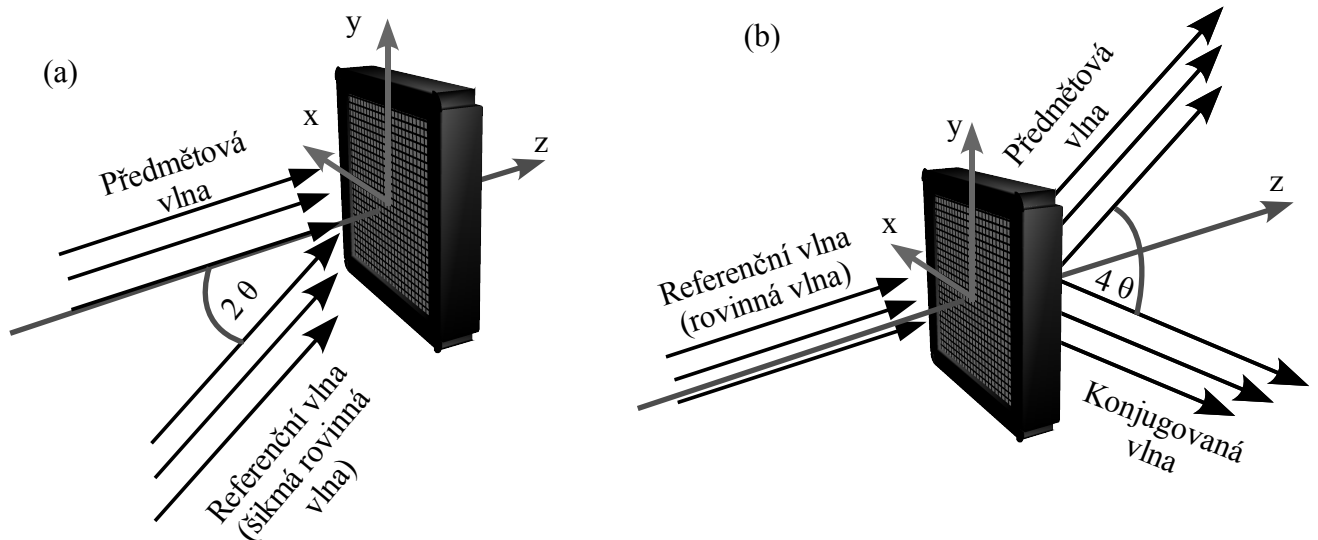
$$\begin{aligned} t(x, y) &\sim |U_o + U_r|^2 = |U_r|^2 + |U_o|^2 + U_r^* U_o + U_r U_o^* = \\ &= I_r + I_o + 2 \sqrt{I_o I_r} \cos[\arg(U_o) - \arg(U_r)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde hvězdičky značí komplexní sdružení, I_r, I_o jsou intenzity referenční a předmětové vlny a $\arg(U_o), \arg(U_r)$ jejich fáze.

Rekonstrukcí optické vlny rozumíme dekódování holografického kódu zapsaného v SLM prostřednictvím stejné referenční vlny U_r , jako v případě zápisu hologramu. Výsledkem je vlna, kterou můžeme zapsat jako součet čtyř vln, tedy

$$U(x, y) = t(x, y) U_r \sim U_r I_r + U_r I_0 + I_r U_0 + U_r^2 U_0^* . \quad (4.14)$$

V případě, kdy intenzita referenční vlny I_r je uniformní, tj. nezávislá na souřadnicích x, y , pak třetí člen v rovnici (4.14) představuje rekonstrukci původní vlny násobené multiplikativním konstantou I_r . Čtvrtý člen představuje konjugovanou verzi třetího členu – tzv. konjugovanou vlnu. Pro efektivitu rekonstrukce hologramu je třeba oddělit třetí člen v (4.14) od ostatních. Konkrétně můžeme použít Leithovo – Upatnikesovo uspořádání, kdy záznam provedeme šikmou rovinou referenční vlnou $U_r(x, y) = A \exp[-i k y \sin(2\theta)]$ a rekonstrukci referenční vlnou při kolmém dopadu na SLM, která v rovině $z = 0$ bude mít tvar komplexní amplitudy $U_r(x, y) = A$ (obr. 4.2).



Obr. 4.2: Záznam (a) a rekonstrukce (b) hologramu v Leithově - Upatnieksově uspořádání

Vyjádříme-li navíc předmětovou vlnu jako $a(x, y) = |a(x, y)| \exp[-i \psi(x, y)]$ přejde vztah (4.13) na

$$\begin{aligned} t(x, y) \sim |U_0 + U_r|^2 &= |U_r|^2 + |U_0|^2 + U_r^* U_0 + U_r U_0^* = \\ &= |A|^2 + |a(x, y)|^2 + 2 |A| |a(x, y)| \cos[\psi(x, y) - k y \sin(2\theta)], \end{aligned} \quad (4.15)$$

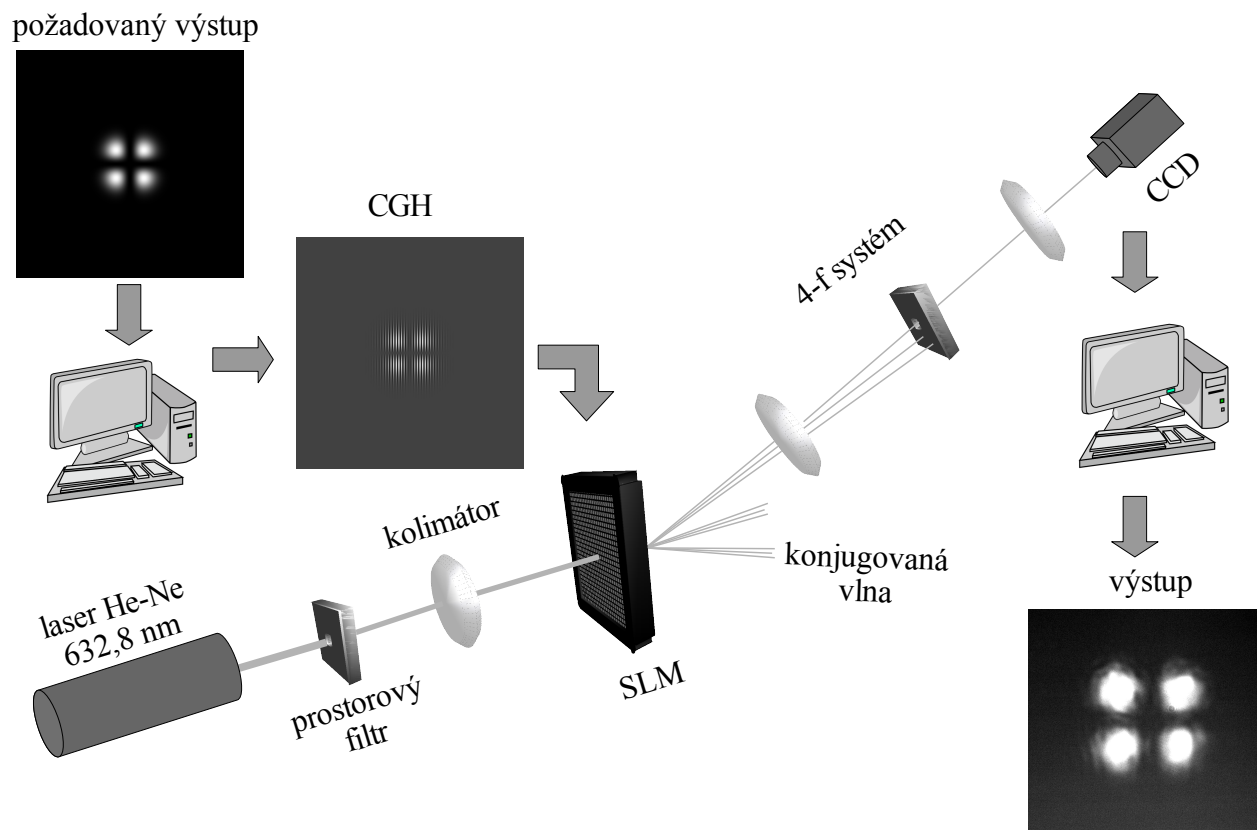
kde jsme předpokládali, že interferující záření je dokonale zkorelované. Vztah (4.14) přejde na

$$\begin{aligned} U(x, y) \sim A |A|^2 + A |a(x, y)|^2 + |A|^2 a(x, y) \exp(i k y \sin(2\theta)) + \\ + A^2 a(x, y)^* \exp(-i k y \sin(2\theta)) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Z posledního vztahu vidíme, že po rekonstrukci hologramu rovinnou vlnou v Leithově - Upatniekově uspořádání vzniknou čtyři vlny, z nichž dvě postupují ve směru optické osy a dvě jsou od ní úhlově odchýlené. Tím se nám podařilo oddělit rekonstruovanou předmětovou vlnu od vln ostatních, a proto můžeme provést přetvarování gaussovského svazku.

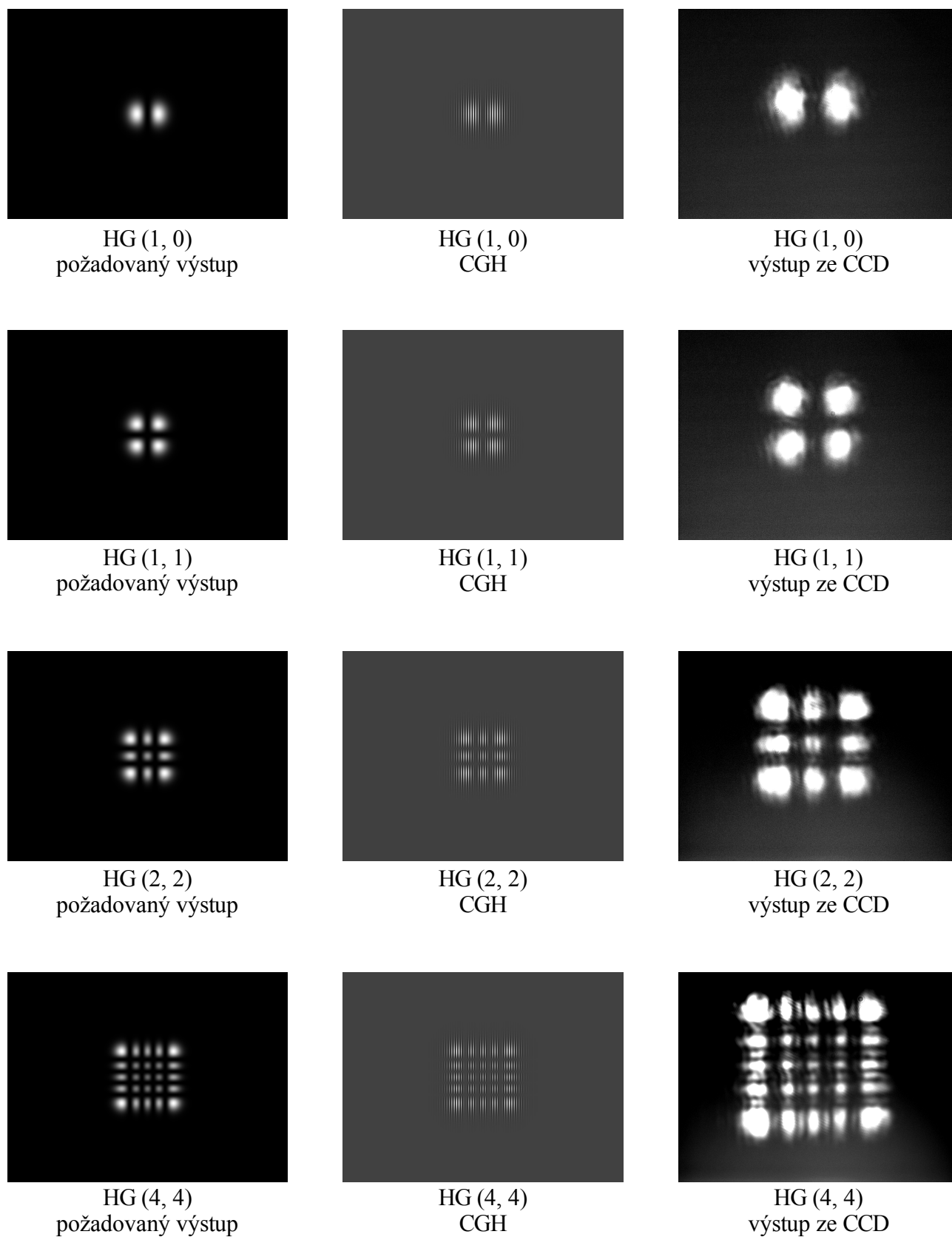
4.2.2. Experimentální provedení prostorového tvarování gaussovského svazku

Záznam hologramu provedeme pomocí počítače v Leithově – Upatniekově uspořádání, kdy necháme interferovat šikmou rovinou vlnu pro $2\theta = 0,004$ s nestandardním gaussovským svazkem. Získaný počítačem generovaný interferenční obraz (tzv. CGH - Computer Generated Hologram) diskretizujeme a adresujeme do funkce propustnosti amplitudového SLM XGA3 CRL OPTO. Rekonstrukci provedeme gaussovským svazkem He-Ne laseru o vlnové délce 632,8 nm, jehož čelo vlnoplochy můžeme považovat za rovinnou vlnu. Laserový svazek prochází nejprve prostrovým filtrem, který zabraňuje, aby na SLM dopadalo parazitní záření. Po průchodu kolimátorem dopadá kolmo na SLM s modulovanou funkcí propustnosti podle CGH. Z rekonstruovaného pole za SLM vybereme pouze to, které odpovídá předmětové vlně, což zajišťuje úhlové oddělení jednotlivých komplexních amplitud v Leithově – Upatniekově uspořádání. Pomocí 4f systému vybereme pouze první difrakční řád, jehož rozložení intenzity zaznamenáme do počítače pomocí CCD kamery. Její výstup můžeme porovnat s požadovaným výstupem, se kterým jsme počítali při tvorbě CGH a vyhodnotit tak úspěšnost rekonstrukce a přetvarování gaussovského svazku (obr 4.3).

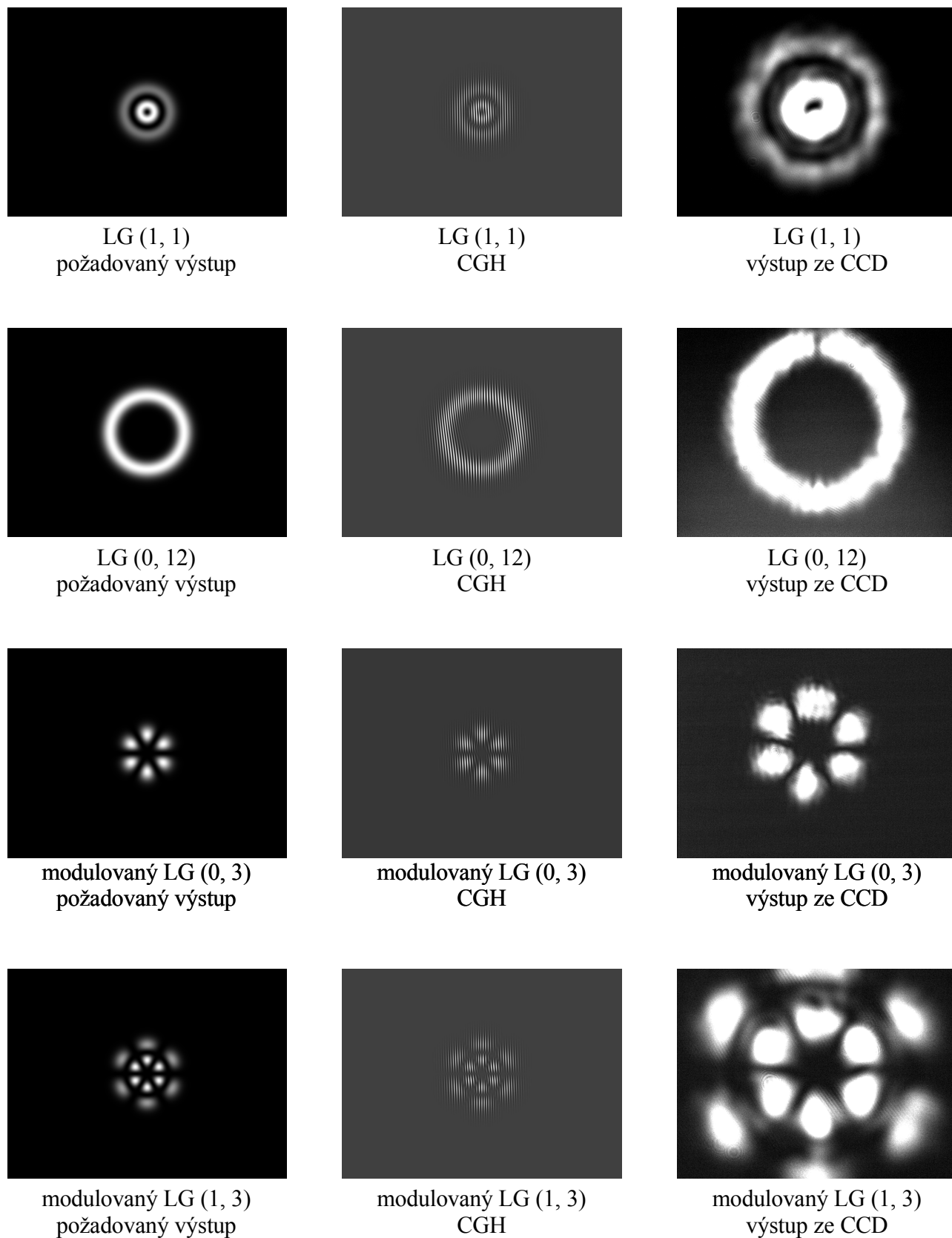


Obr. 4.3: Experimentální schéma pro prostorové tvarování gaussového svazku pomocí amplitudového SLM s CGH

V sérii následujících obrázků ukážeme srovnání požadovaného výstupu vytvořeného pomocí počítače s výstupem experimentu s amplitudovým SLM. Můžeme si všimnout interferenčních proužků vyskytujících se na výstupech z experimentu, které vznikly v důsledku interference na krycím sklíčku CCD kamery. Také vidíme, že výstup z experimentu má větší rozměry než počítačem připravený výstup pro CGH. Důsledkem je šíření laserového svazku volným prostorem mezi CCD kamerou a 4-f systémem.



Obr. 4.4: Srovnání výsledků konverze gaussového svazku na hermiteovské - gaussové svazky pomocí SLM



Obr. 4.5: Srovnání výsledků konverze gaussového svazku na laguerreovské - gaussové svazky pomocí SLM

4.3. Tvarování gaussovského svazku prostřednictvím fázového modulátoru

Jednoduchou metodu pro konverzi gaussovského svazku na HG svazek (m, l) – tého řádu prostřednictvím fázového SLM navrhl A. Soifer [19]. Fázová maska pak má funkci propustnosti

$$t(x, y) = \operatorname{sgn} H_m \operatorname{sgn} H_l \operatorname{rect}\left(\frac{x}{D_x}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{D_y}\right), \quad (4.17)$$

kde funkce signum je definovaná jako

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

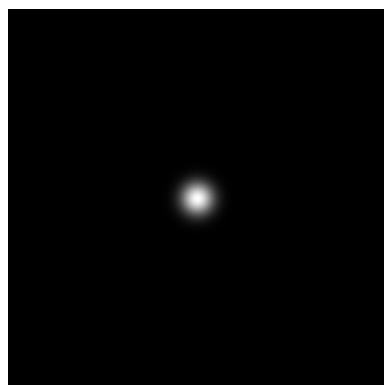
a funkce rect jako

$$\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

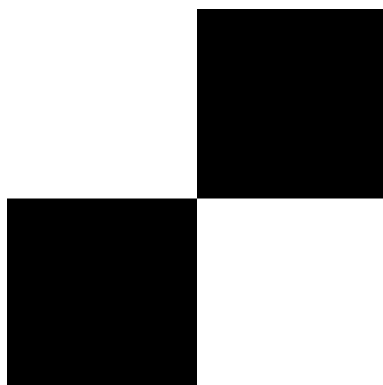
A. Soifer prokázal experimentální difrakční účinnost těchto binárních fázových masek kolem 63,85% pro nízké řády HG svazků. Výsledky pak využil k výrobě difrakčních prvků o stejné funkci propustnosti pomocí elektronové litografie [19].

Zobrazení prostřednictvím fázových masek s funkcí propustnosti (4.17) jsme provedli pomocí počítačem vytvořeného programu (obr. 4.6). Na obrázku jsme uvedli přetvarovaný gaussovský svazek v několika zastavovacích rovinách, aby bylo zřejmé, že získaný svazek drží svůj tvar.

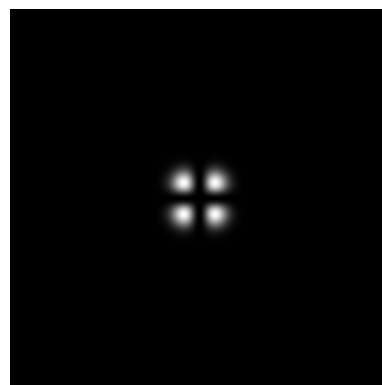
Hlavní výhodou při práci s fázovým SLM je, že v ideálním případě na něm nedochází k štěpení dopadající energie v důsledku difrakce na blejzovaném profilu masky SLM. Naproti tomu prostřednictvím amplitudového SLM dochází vždycky k štěpení energie použitím jakéhokoliv profilu masky modulátoru. Metody vytvoření CGH, který by konvertoval dopadající gaussovský svazek na jiný typ svazku, jsou prostřednictvím amplitudového SLM přímočařejší než metody použité u fázového masky. V následující kapitole však uvidíme, že při prostorové lokalizaci světla využitelné pro optické manipulace hrají energetické aspekty významnou roli, a proto se používá převážně fázový SLM.



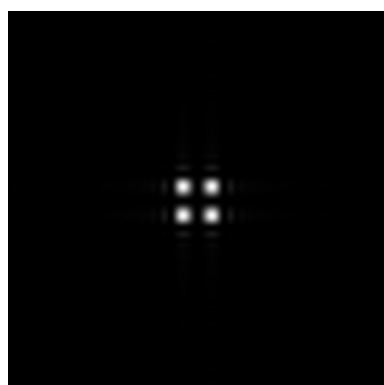
a) dopadající gaussovský svazek



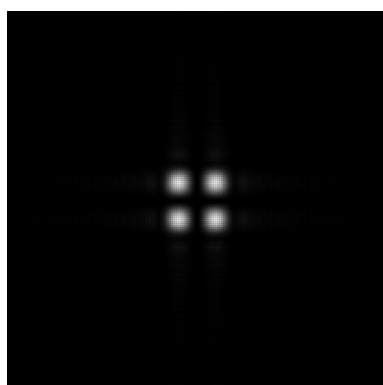
b) fázový maska pro přetvarování na HG (1,1)



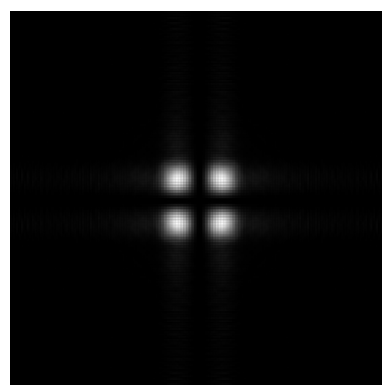
c) ideální HG (1, 1)



d) obraz vytvořený 250 mm za modanem



e) obraz vytvořený 450 mm za modanem



f) obraz vytvořený 650 mm za modanem

Obr. 4.6: Přetvarování gaussovského svazku na HG(1, 1) svazek pomocí fázové binární masky b)

5. Třírozměrná lokalizace světla prostřednictvím modulátoru

Důležitou aplikací SLM světla jsou optické manipulace. Dokážeme-li pomocí SLM ovládaného počítačem dynamicky lokalizovat stopu laserového svazku do libovolného místa v prostoru, můžeme manipulovat s drobnými dielektrickými částicemi mikrometrových i nanometrových rozměrů. Výsledkem mohou být např. holografické optické pinzety (HOT – Holographic Optical Tweezers) sloužící k ovládání mnoha částic najednou, optické víry vytvořené optickými vírovými svazky sloužící k roztáčení částice nebo optické třídění mikročástic.

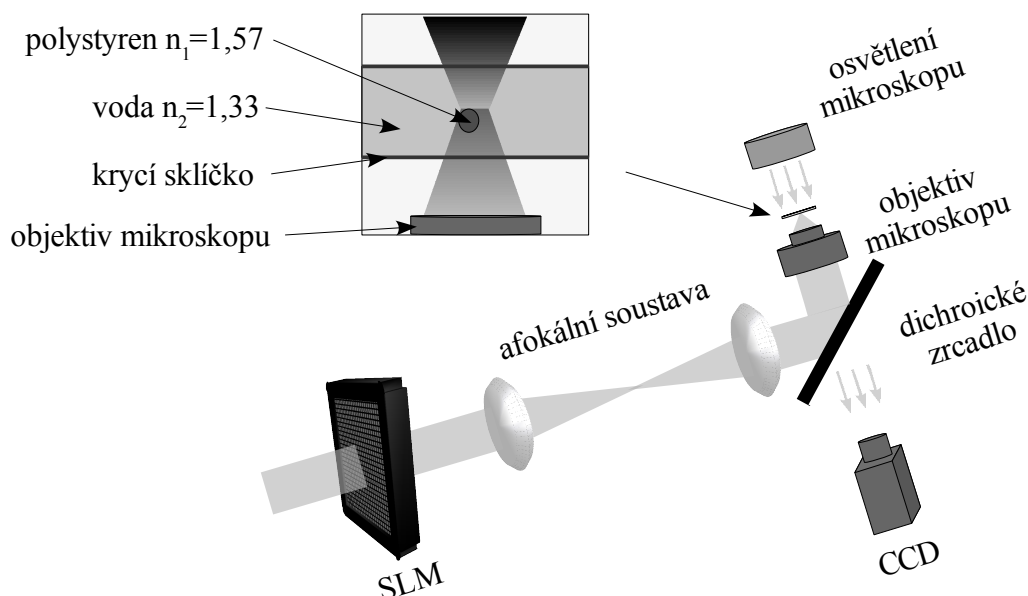
Protože optické manipulace v součinnosti s SLM jsou dynamicky rozvíjející se oblastí, uvedeme v první podkapitole její základní charakteristiky. V následující podkapitole uvedeme základní fázové masky umožňující třírozměrnou lokalizaci světla prostřednictvím SLM. Jednoduché fázové masky, které nahrazují klasické optické elementy, jako jsou čočky nebo klíny, nazýváme DOE – difrakční optické elementy. Uvedeme jak výsledky s DOE získané pomocí počítačové simulace, tak výsledky experimentální získané s pomocí fázového SLM P512 BOULDER. Na závěr podáme přehled numerických algoritmů pro dynamické ovládání SLM sloužících k třírozměrné prostorové lokalizaci světla.

5.1. Optické manipulace s částicemi

O mechanických účincích světla se poprvé zmínil Johannes Kepler ve svém díle *De Cometis* v roce 1619, když studoval odklon chvostu komet v důsledku silového účinku slunečního záření. Později v první polovině 20. století zjistil A. Einstein při studiu fotoelektrického jevu, že elementární částice světla – fotony, mají sice nulovou klidovou hmotnost, ale nenulovou hybnost, kterou předávají při interakci částicím dle zákona zachování hybnosti. Konečně s vynálezem laseru a díky průkopnickým pracím A. Ashkina [21] byly položeny základy optické mikromanipulace.

Je-li průsvitná částice o indexu lomu n_1 v prostředí o indexu lomu n_2 přičemž $n_1 > n_2$ vystavena laserovému záření, silové působení světla ji táhne do míst s nejvyšší intenzitou. (V případě gaussovského svazku se jedná o místo na ose a v pase svazku ($W = W_0$).) Mechanické účinky světla na částici jsou výsledkem působení dvou sil: rozptylové síly F_{scat} a gradientní síly F_{grad} . Rozptylová síla, jejíž účinky se nazývají světelným tlakem, tlačí částici ve směru šíření laserového svazku a je přímo úměrná jeho intenzitě. Gradientní síla je přímo úměrná gradientu intenzity laserového záření a může mít podélnou i příčnou složku. Tato síla směřuje částici do místa s největším gradientem intenzity. Vektorový výsledek obou sil pak působí jako optická past.

K tomu, aby gradientní síla vyvážila sílu rozptylovou je třeba docílit velkého gradientu intenzity. Toho dosáhneme objektivem mikroskopu, který fokusací laserového svazek vytvoří potřebný spád intenzity. Zároveň příčná složka gradientní síly bude částici nepatrně vychylovat ze středu svazku v příčném směru. Klasické optické pinzety dokáží vytvořit pomocí jednoho optického svazku většinou pouze jednu optickou past. Optická pinzeta obsahující SLM dokáže prostřednictvím vhodné masky vytvořit z jednoho laserového svazku vícenásobné optické pasti, které mohou být lokalizované ve třech dimenzích a které v závislosti na změně masek SLM mohou mít dynamický průběh.



Obr. 5.1: Schéma dynamické holografické optické pinzety

Na obr. 5.1 vidíme typické schéma dynamické holografické optické pinzety, která obsahuje SLM. Afokální soustava upraví modulovaný laserový svazek, který je naveden do objektivu mikroskopu. Ten fokuzuje svazek na krycí sklíčko, pod kterým se nachází roztok s mikročásticemi určenými k manipulaci. Vše pozorujeme pomocí CCD kamery za dichroickým zrcátkem, které propouští vlnovou délku osvětlovací soustavy mikroskopu a odráží vlnovou délku laserového svazku.

V poslední době se mluví i o fázové gradientní síle \mathbf{g} , která také přispívá k celkovému radiačnímu tlaku. Má podélnou i příčnou složku o velikosti, která závisí na gradientu fáze laserového svazku. Součinnost této síly přináší nové možnosti v optických manipulacích, a to především manipulace s neprůsvitnými či absorbujícími částicemi nebo s částicemi o nižším indexu lomu než okolní kapalina. Účinky této síly mohou být vyvolány buď speciálním tvarem fázové masky [22] nebo pomocí vírových laserových svazků, které díky nenulovému orbitálnímu momentu hybnosti dávají stejný silový účinek [23].

5.2. Lokalizace světla pomocí analyticky určených DOE

Cesta k dynamické optické pinzetě, která dokáže provádět třírozměrnou lokalizaci světla prostřednictvím složitých numerických výpočtů na SLM, začíná na jednoduše definovaných fázových maskách, které jsou analogií jednoduchým optickým prvkům. Proto zkoumáme vliv jednotlivých DOE na laserové záření s výhodami spojenými s SLM.

Zapisujeme-li fázovou funkci $\Phi(x, y)$ klasického optického elementu do funkce propustnosti $t(x, y)$ fázového SLM tvaru (2.5) můžeme ji redukovat na funkci $\varphi(x, y) \in [0, 2\pi]$. Matematicky k zápisu redukce budeme používat funkci mod, která je definovaná vztahem

$$\varphi = \text{mod}_{2\pi} \Phi, \quad (5.1)$$

kde

$$\text{mod}_{2\pi} \Phi = \Phi - 2\pi j \quad (5.2)$$

pro $j 2\pi \leq \Phi \leq (j+1)2\pi$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

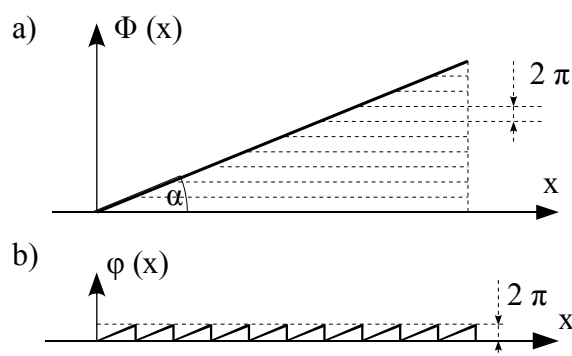
5.2.1. Lokalizace světla v příčné rovině

Optický klín

Funkcí optického klínu je odklánět dopadající optický svazek dle velikosti lámaného úhlu klínu α . V jazyce optických manipulací to znamená lokalizovat optickou past do určitého místa příčné roviny v závislosti na α . Spojitá fázová funkce optického klínu má tvar

$$\Phi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} x (n-1) \tan(\alpha), \quad (5.3)$$

kde n je index lomu optického klínu. Redukce spojitě fázové funkce $\Phi(x)$ optického klínu je znázorněna na obr. 5.2.



Obr. 5.2: Redukce spojitě fázové funkce optického klínu $\Phi(x)$ (a)) na funkci $\varphi(x)$ (b))

Optický klín simulovaný fázovým SLM je realizován fázovou maskou s blejzovaným profilem, která odklání dopadající laserový svazek pouze do jednoho difrakčního řádu (viz obr. 2.7) pod tzv. deviační úhlem β , který je dán vztahem

$$\beta = (n - 1) \tan (\alpha). \quad (5.4)$$

Fázový SLM může simulovat optický klín o libovolném indexu lomu, a proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro $n = 2$ a pro malé lámové úhly je deviační úhel přímo určen úhlem lámavým, tedy

$$\beta \approx \alpha. \quad (5.5)$$

Dosazením (5.5) do mřížkové rovnice (2.4) dostáváme periodu d redukované fázové funkce $\varphi(x)$

$$d = \frac{\lambda}{\sin (\beta)} \approx \frac{\lambda}{\sin (\alpha)}, \quad (5.6)$$

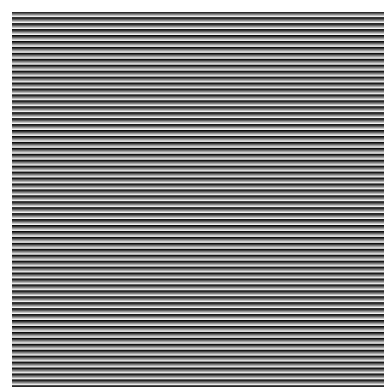
která musí být alespoň o řád větší než šířka jednoho pixelu SLM, aby se zamezilo aliasing efektu.



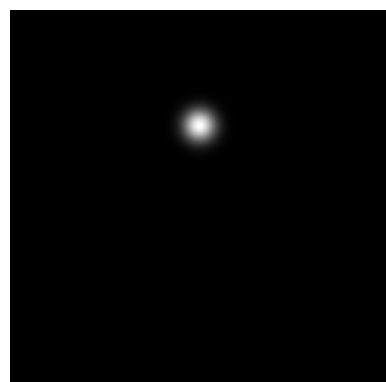
a) fázová maska klínu
s deviačním úhlem 0,03 rad



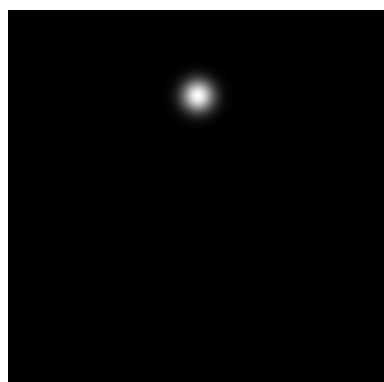
b) fázová maska klínu
s deviačním úhlem 0,04 rad



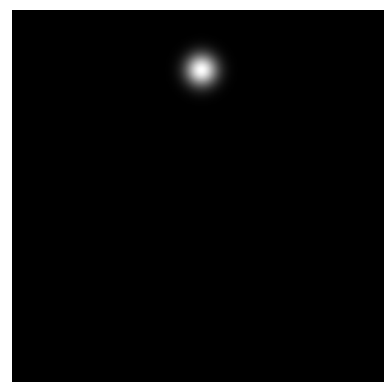
c) fázová maska klínu
s deviačním úhlem 0,05 rad



d) gaussovský svazek
odkloněný SLM s fázovou
maskou a)



e) gaussovský svazek
odkloněný SLM s fázovou
maskou b)



f) gaussovský svazek
odkloněný SLM s fázovou
maskou c)

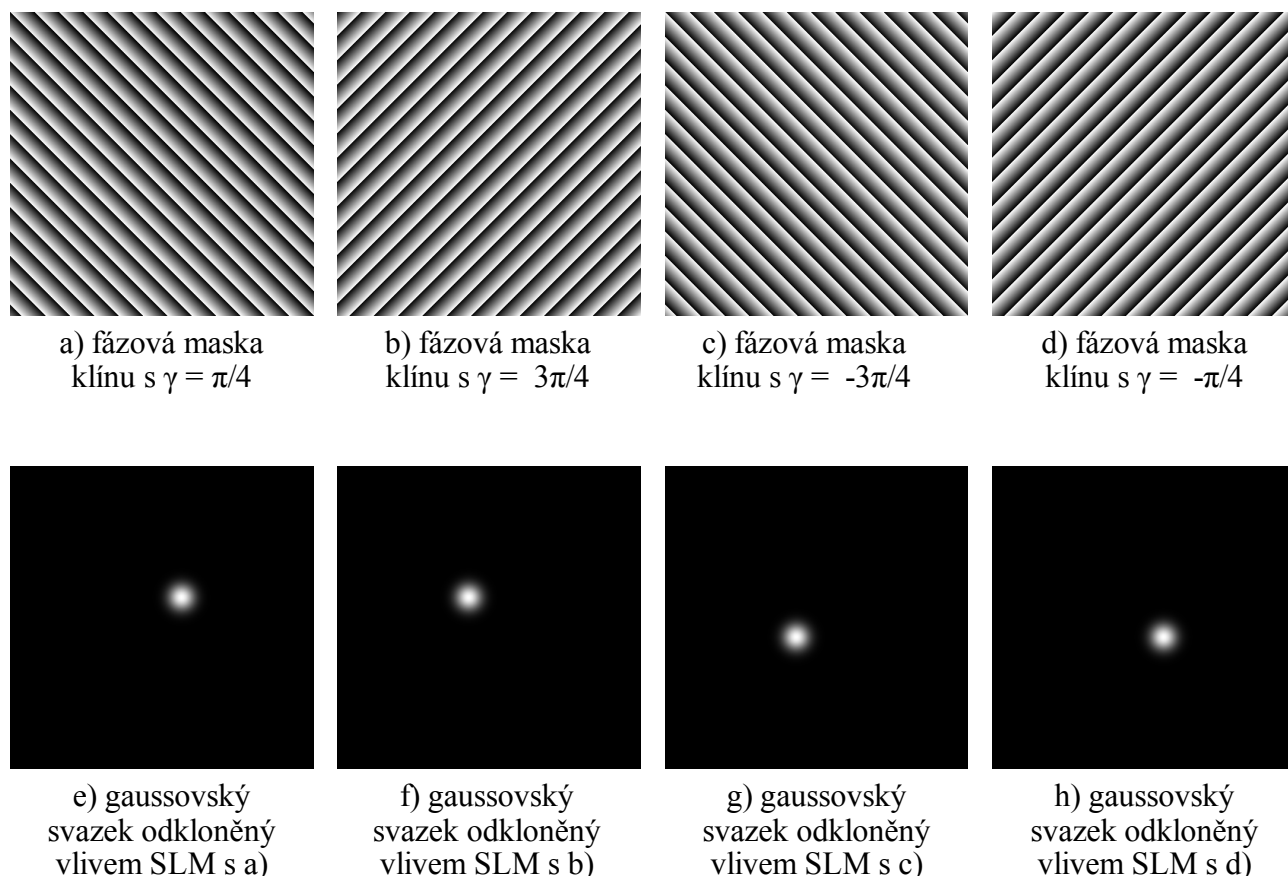
Obr. 5.3: Odklání laserového svazku podél souřadné osy vlivem SLM s fázovou maskou optického klínu o různých deviačních úhlech

Pomocí změny lámavého úhlu optického klínu můžeme lokalizovat laserový svazek do libovolného místa na jedné ze souřadných os (obr. 5.3). Budeme-li postupně adresovat na fázový SLM masky optických klínů s rostoucí hodnotou lámavého klínu, dostaneme spojitě se posouvající stopu laserového svazku. Experimentální provedení této myšlenky můžeme pozorovat na krátké animaci pořízené CCD kamerou v příloze na CD.

Následným natočením klínu o úhel γ můžeme lokalizovat stopu laserového svazku do libovolného místa pozorovací roviny Fázová funkce optického klínu (5.3) pak nabude tvaru

$$\Phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} [x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma)] \beta. \quad (5.7)$$

Počítačovou simulaci SLM s fázovou maskou otáčejícího se optického klínu podává obr. 5.4. Budeme-li postupně adresovat na fázový SLM masky optických klínů s rostoucí hodnotou sklonu, dostaneme rotující stopu laserového svazku okolo středu. Experimentální provedení této myšlenky můžeme pozorovat na krátké animaci pořízené CCD kamerou v příloze na CD.

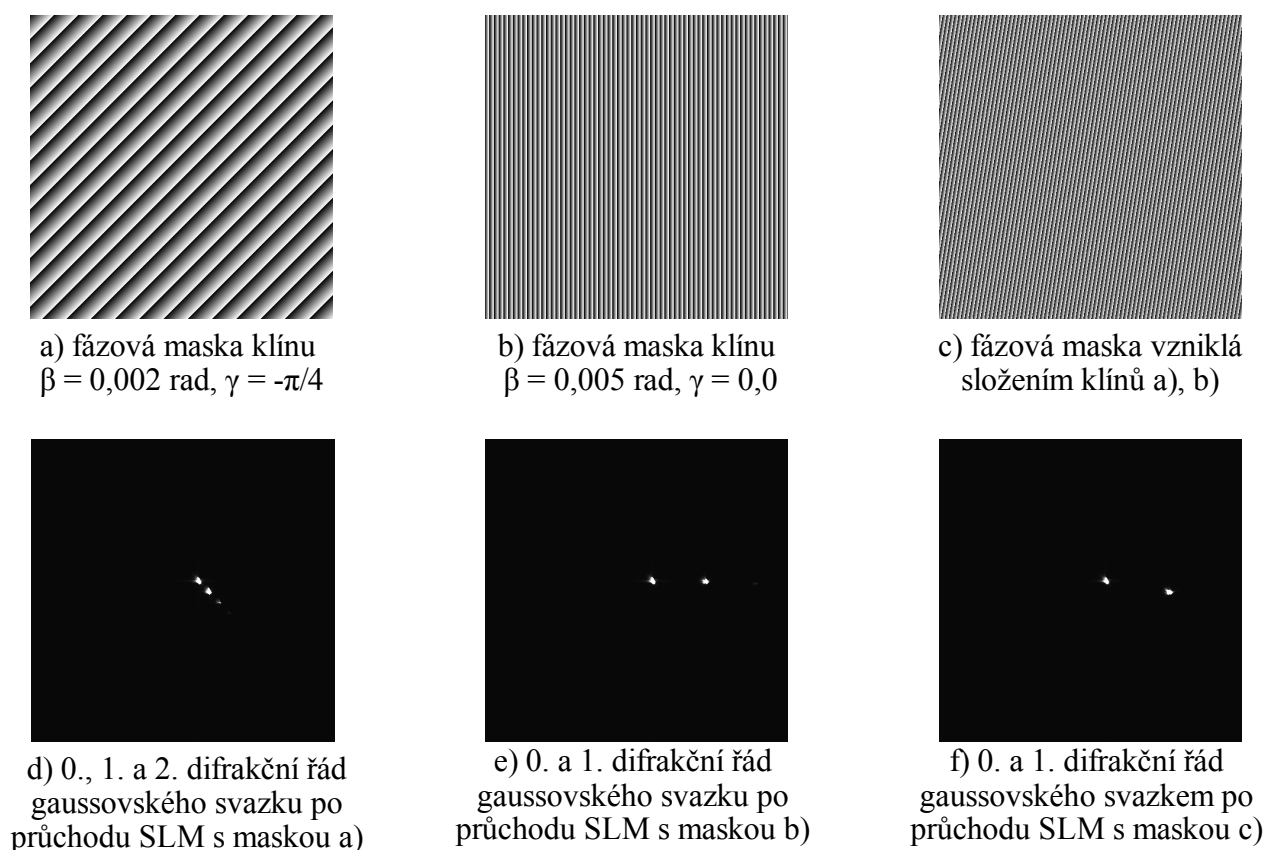


Obr. 5.4: Odklání laserového svazku do libovolného místa pozorovací roviny vlivem SLM s fázovou maskou optického klínu s deviačním úhlem 0,002 rad a o různých sklonech

Kombinace optických klínů

SLM může kombinovat účinky i více optických elementů najednou, např. více klínů. Mluvíme pak o kombinovaných DOE. Složením fázových masek dvou klínů o různém sklonu a různém vrcholovém úhlu dostaneme kombinovaný DOE, jehož účinky jsou stejné jakoby laserový svazek po řadě prošel prvním a následně druhým optickým klínem. Tuto situaci ukazuje experiment s SLM P512BOULDER na obr. 5.5, na kterém bylo ponecháno více difrakčních řádů, aby bylo zřejmé úhlové odchýlení. Matematicky pod pojmem složení fázových masek rozumíme sečtení fázové funkce prvního a druhého klínu a následnou redukci výsledné fázové funkce na interval $[0, 2\pi]$.

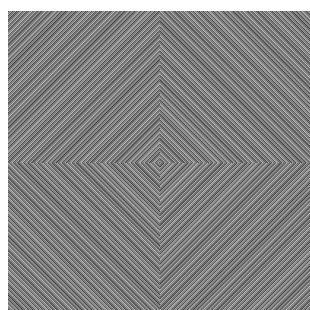
Jako kombinaci masek můžeme brát i vliv pevné amplitudové binární mřížky SLM (viz kapitola 2.2.1). Dopadající laserový svazek jakoby nejprve procházel touto maskou a až poté prochází maskou s definovaným rozdělením funkce propustnosti. Výsledné zobrazení SLM je proto vždy výsledkem kombinace účinků obou masek.



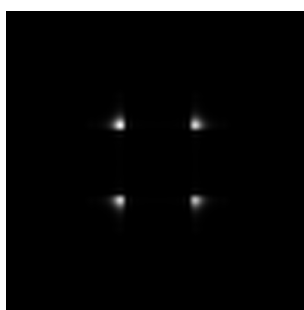
Obr. 5.5: Experimentální ověření účinků fázové masky vzniklé kombinací optických klínů prostřednictvím SLM P512BOULDER

Koláž optických klínů

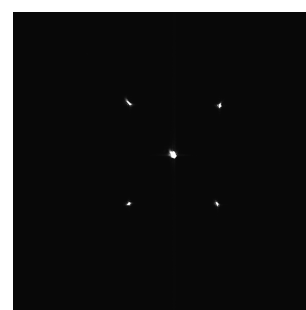
Jedna maska SLM může simulovat více optických klínů najednou, a to vytvořením tzv. koláže klínů. Rozdělíme-li např. fázovou masku SLM na čtyři části a do každé nadefinujeme optický klín o stejném lámavém úhlu, ale různém sklonu, bude dopadající laserový svazek rozdělen do čtyř směrů. Tato situace je znázorněna na obr. 5.6, kde je pro názornost na obr. 5.6 c), d), e) ponechán nultý difrakční řád, který není zohledněn v počítačové simulaci a tudíž není na obr. 5.6 b). Fázové masky dávající obr. 5.6 d), e) jsme navíc zkombovaly s dalším optickým klínem. Odchýlíme se tak od 0. difrakčního řádu, který můžeme pomocí 4-f systému odfiltrovat (obr. 5.6 f)). Takové schéma můžeme využít např. k vytvoření více optických pastí prostřednictvím jednoho laserového svazku.



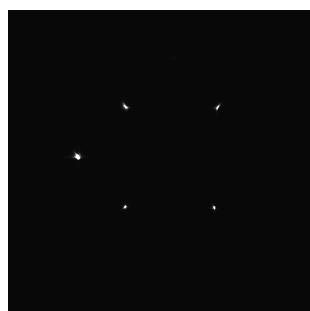
a) fázová maska
koláže klínů



b) simulace pomocí
počítače



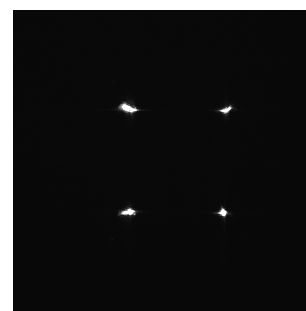
c) experiment pomocí
PMS P512 BOULDER



d) experiment s
kombinovaným klínem o
deviačním úhlu 0,1 rad



e) experiment s
kombinovaným klínem o
deviačním úhlu 0,14 rad



f) experiment s
prostorovou filtrací
pomocí 4-f systému

Obr. 5.6: Experimentální ověření účinků fázové masky vzniklé koláží optických klínů prostřednictvím SLM P512BOULDER

5.2.2. Lokalizace světla v různých pozorovacích rovinách

Sférická čočka

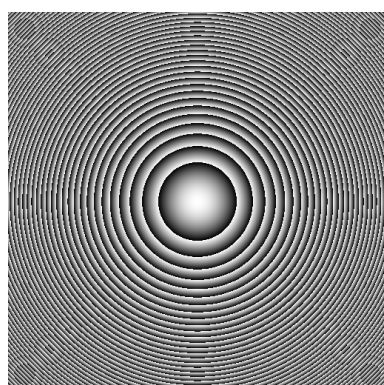
V paraxiální aproximaci lze spojitou funkci sférické čočky zapsat jako

$$\Phi(x, y) = \Phi(r) = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{r^2}{2f}, \quad (5.8)$$

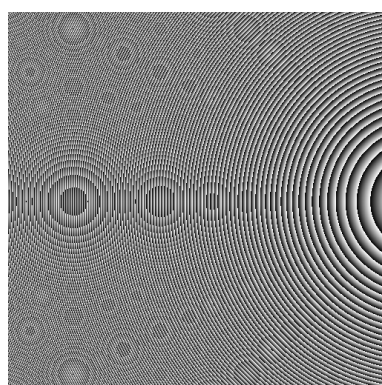
kde f je ohnisková vzdálenost čočky, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \leq \frac{D}{2}$ a D je průměr čočky. Redukce funkce $\Phi(x, y)$ na interval $[0, 2\pi]$ je znázorněna na obr. 2.4. Poloměr jednotlivých zón, kdy klesne redukovaná fázová funkce na nulu, najdeme z podmínky $\varphi(r_j) = -2\pi j$, a tedy dosazením do (5.8)

$$r_j = \sqrt{2\lambda f j}, \quad (5.9)$$

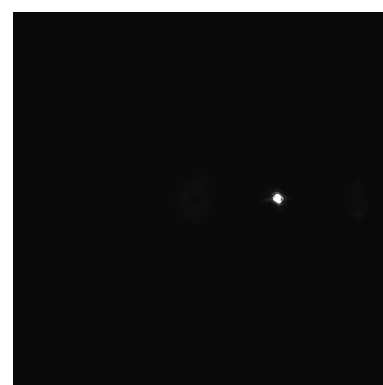
kde $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Šířka jednotlivých Fresnelových zón (tj. oblast, kde redukovaná fázová funkce podstupuje změnu od své minimální do své maximální hodnoty) klesá směrem k okraji čočky a její nejmenší hodnota je charakteristickým parametrem DOE představující sférickou čočku. Její hodnota musí být jako u optického klínu alespoň o řád větší než šířka jednoho pixelu SLM, aby se zamezilo aliasing efektu. Na obr. 5.7 je znázorněna fázová maska sférické čočky (a), kombinovaná fázová maska optického klínu a sférické čočky (b) a obraz fokusovaného laserového svazku zaznamenaný pomocí CCD kamery po průchodu SLM P512 BOULDER s fázovou maskou (b). Obraz pozorujeme v obrazové ohniskové rovině čočky. Odtud vidíme, že pomocí proměnné ohniskové vzdálenosti čočky můžeme hloubkově lokalizovat stopu laserového svazku (optickou past) do různých pozorovacích rovin.



a) fázová maska čočky
 $f = 500 \text{ mm}$



b) fázová maska čočky
 $f = 500 \text{ mm}$ a klínu
 $\beta = 0,009$

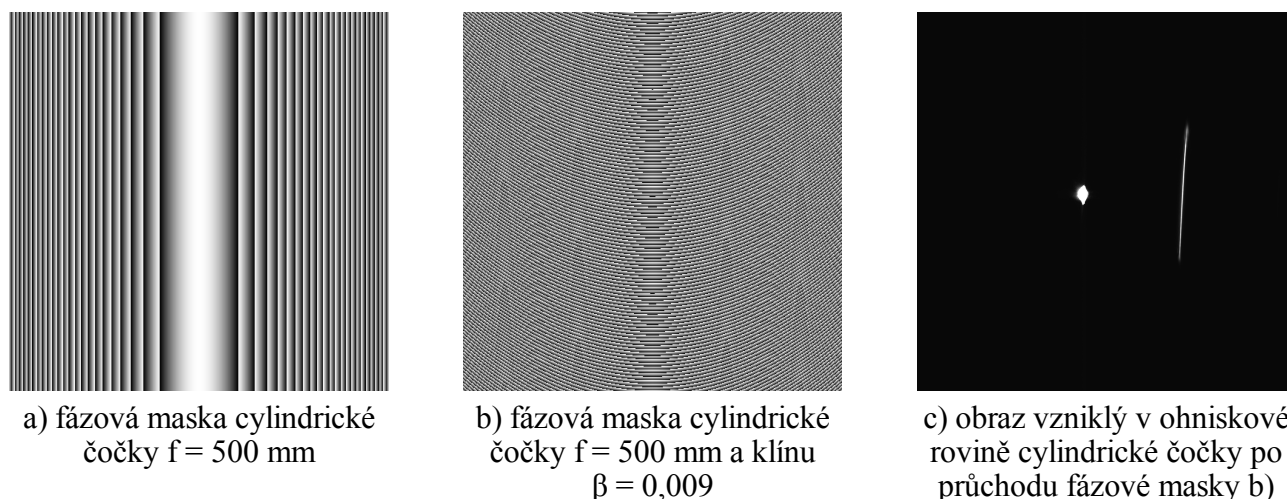


c) zobrazení SLM
s fázovou maskou b)
v ohniskové rovině čočky

Obr. 5.7: Experiment s SLM P512BOULDER provedený s fázovou maskou sférické čočky

Cylindrická čočka

Někdy je potřeba vytvořit optickou past jako úsečku kolmou k optické ose, ve které lze udržet několik kulovitých mikročástic nebo mikročástic s větším podélným průřezem. Toho se dosáhne pomocí DOE, jehož funkce propustnosti nahrazuje cylindrickou čočku a má tvar (5.8) s chybějící závislostí na jedné z kartézských souřadnic. Na obr. 5.8 a) je znázorněna fázová maska cylindrické čočky, která fokusuje gaussovský svazek do tenké úsečky. Na obr. 5.8 b) je znázorněna kombinovaná fázová maska cylindrické čočky a optického klínu. Experimentální výsledek zobrazení, který jsme získali s pomocí SLM P512 BOULDER a s fázovou maskou podle obr. 5.8 b), je na obr. 5.8 c). Kromě tenké úsečky, která je požadovaným výsledkem zobrazení, je zobrazen i výrazný nultý difrakční řád. Různou polohu úsečky lze zajistit kombinací cylindrické čočky s vhodně orientovaným klínem.



Obr. 5.8: Experiment s SLM P512 BOULDER s fázovou maskou cylindrické čočky

Woodova zonální destička

Stejně jako jsme v případě koláže optických klínů dostali z jednoho laserového svazku několik stop laserových svazků v jedné zastavovací rovině, můžeme pomocí fázové Fresnelovy zonální destičky (tzv. Woodova zonální destička) dostat několik ohnisek v různých zastavovacích rovinách. Redukovaná fázová funkce Woodovy zonální destičky je definovaná jako

$$\varphi(r) = \begin{cases} \pi, & a_1 \sqrt{2n} < r < a_1 \sqrt{2n+1} \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases} \quad (5.10)$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots, 2N$, a_1 je poloměr nejmenší Fresnelovy zóny z celkových N Fresnelových zón.

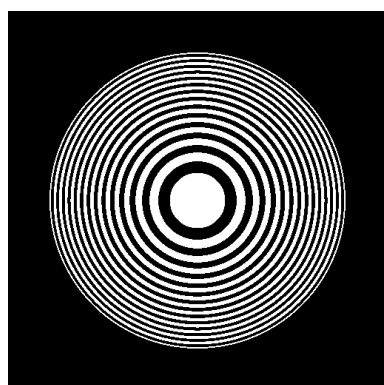
Tato fázová zonální destička funguje jako multifokální čočka, která je zároveň spojkou i rozptylkou, s ohnisky rozmístěnými podél optické osy ve vzdálenostech

$$f_{2n+1} = \pm \frac{1}{2n+1} \frac{a_1^2}{\lambda} \quad (5.11)$$

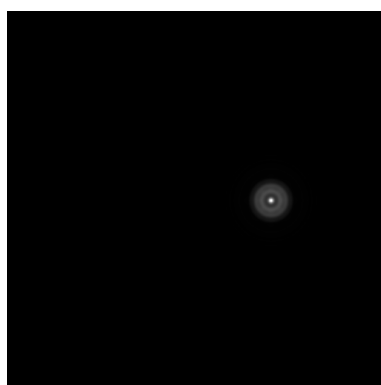
o intenzitách

$$I_n = \frac{I_0}{(2n+1)^2}, \quad (5.12)$$

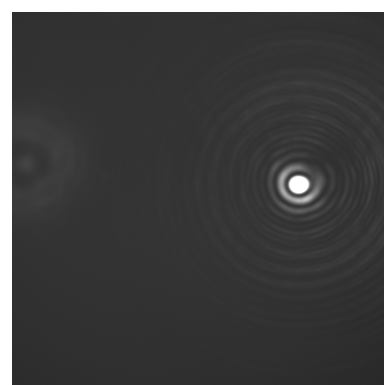
kde I_0 je intenzita nultého ohniska ([4], [24]). Na obr. 5.9 a) je znázorněna fázová maska Woodovy zonální destičky, která je ohraničena, aby se zamezilo aliasing efektu. Charakteristickým parametrem je ohnisková vzdálenost nultého ohniska, která v případě obr. 5.9 a) je $f_0 = 500 \text{ mm}$. Na obr. 5.9 b) je výsledek počítačové simulace zobrazení prostřednictvím SLM s kombinovanou fázovou maskou a) a optickým klínem o $\beta = 0,009 \text{ rad}$. Obr. 5.9 c) ukazuje experimentální zobrazení prostřednictvím SLM P512BOULDER o stejné fázové masce jako v případě obr. 5.9 b). V levé části obr. 5.9 c) vidíme nultý difrakční řád. Poslední dva obrázky byly pořízeny při osvětlení gaussovským svazkem ve vzdálenosti 500 mm, tedy v nulté ohniskové vzdálenosti Woodovy zonální destičky.



a) fázová maska Woodovi
zonální destičky
o $f_0 = 500 \text{ mm}$



b) počítačová simulace
zobrazení SLM s maskou
a) ve vzdálenosti 500 mm

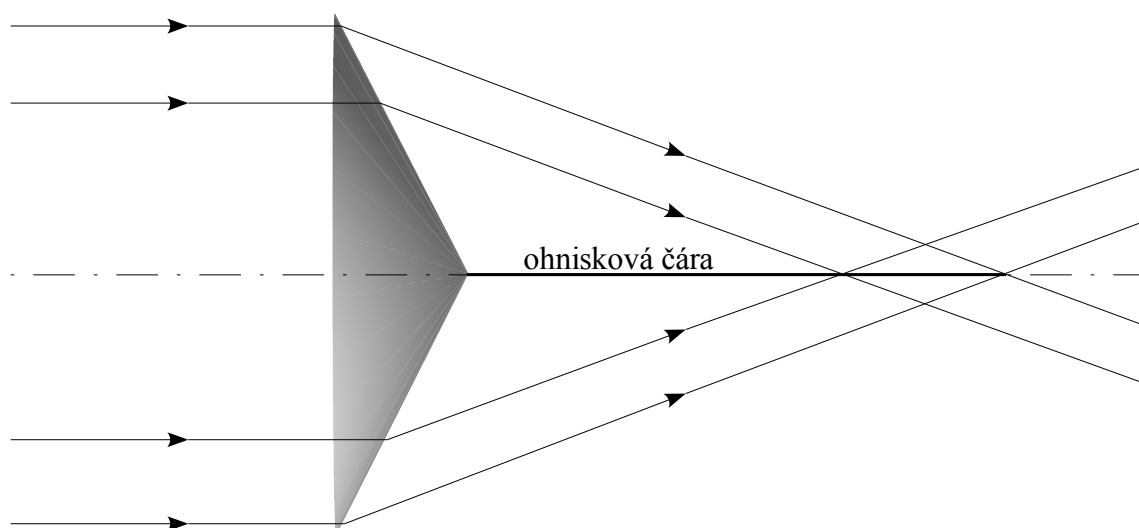


c) experiment zobrazení
SLM s maskou a)
ve vzdálenosti 500 mm

Obr. 5.9: Zobrazení Woodovo zonální destičkou s ohniskovou vzdáleností $f_0 = 500 \text{ mm}$

Axikon

Stejně jak lze pomocí DOE simulujícího cylindrickou čočku vytvořit ohniskovou úsečku v libovolné pozorovací příčné rovině, lze pomocí axikonu vytvořit ohniskovou úsečku ve směru optické osy. Existuje více způsobů jak vytvořit axikon [25].

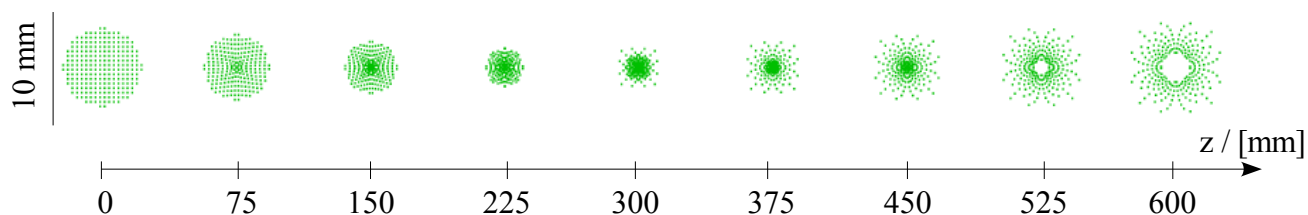


Obr. 5.10: Průchod paprsků refrakční axikonem ve tvaru rotačního kužele

Průchod paprsků klasickým refrakčním axikonem ve tvaru rotačního kužele je znázorněn na obr. 5.10. Refrakční axikon má fázovou funkci ve tvaru

$$\Phi(r) = \frac{2\pi}{\lambda} r (n - 1) \tan \alpha, \quad (5.13)$$

kde n je index lomu axikonu a α jeho lámaný úhel. Při porovnání s fázovou funkcí optického klínu (5.3) je patrné, že jsme pouze zaměnili kartézskou souřadnici x za polární souřadnici r . Refrakční axikon si lze představit jako těleso, které vznikne rotací řezu optického klínu kolem osy procházející jeho kratší stranou. Proto ve vzdálenosti větší než je délka ohniskové úsečky vzniká vlivem průchodu axikonem obraz ve tvaru prstence. Axikon můžeme chápat jako koláž fázových masek mnoha klínů o stejném lámaném úhlu, ale se spojitě se měnícím azimutálním natočením. Představu o zobrazení SLM s fázovou maskou obdobnou axikonu podle obr. 5.13 získáme ze spot diagramů, které jsme dostali trasováním paprsků programem OSLO. Na obr. 5.11 jsou uvedeny spot diagramy v devíti zastavovacích rovinách. Ve vzdálenosti 525 mm vidíme, že střed obrazce zůstává prázdný a že paprsky jsou soustředěny do charakteristického prstence.



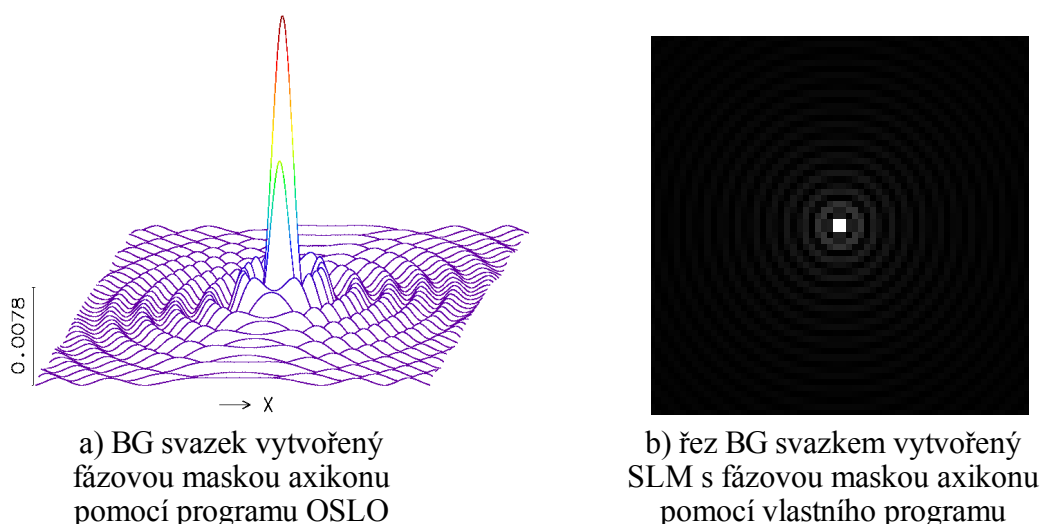
Obr. 5.11: Zobrazení SLM s fázovou maskou axikonu o deviačním úhlu 0,008 rad a průměru 7 mm v různých příčných rovinách podél optické osy z pomocí programu OSLO metodou trasování paprsků

Z hlediska vlnové optiky při zobrazení nekonečně rozlehlým axikonem, na který dopadá nekonečně rozlehlá rovinná vlna, vzniká díky konstruktivní interferenci besselovský svazek. Jeho příčný profil intenzity je charakterizovaný druhou mocninou Besselovy funkce prvního druhu nultého řádu $J_0(k\beta r)$, kde k je vlnové číslo, β deviační úhel a r polární souřadnice. Takovému svazku se někdy říká nedifrakční, protože při šíření nemění svůj příčný profil. Ve skutečnosti však nekonečně rozlehlou rovinou vlnu nahradí gaussovský svazek o poloměru w_0 a nekonečně rozlehlý axikon nahradí ohraničený axikon. Rozdělení intenzity v příčné rovině je pak možné určit pomocí metody stacionární fáze [26] a vzniká pseudonedifrakční besselovský – gaussovský (BG) svazek o intenzitě [27]

$$I(r, z) = \frac{W_0^2}{W^2} \exp \left[-\frac{2r^2}{W^2} - \frac{k_t^2 z^2 z_0}{k(z^2 + z_0^2)} \right] J_0(k_t Q r) J_0(k_t Q^* r), \quad (5.14)$$

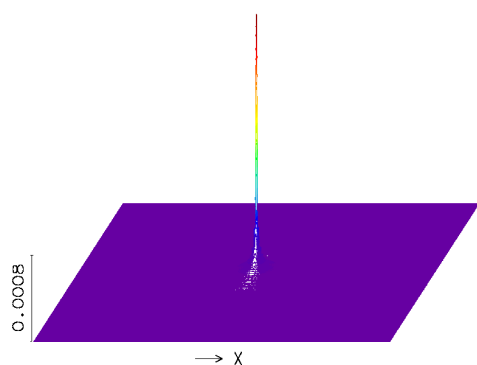
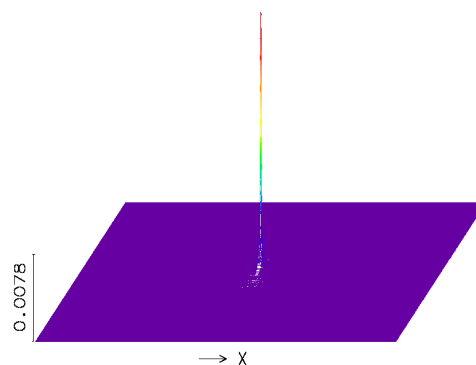
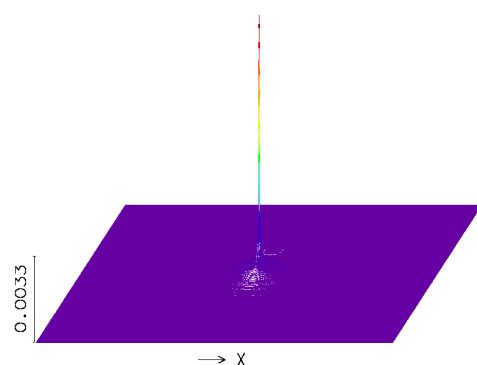
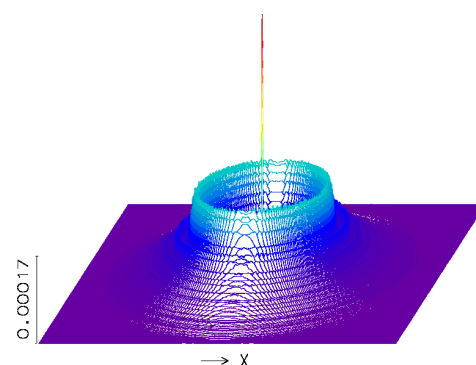
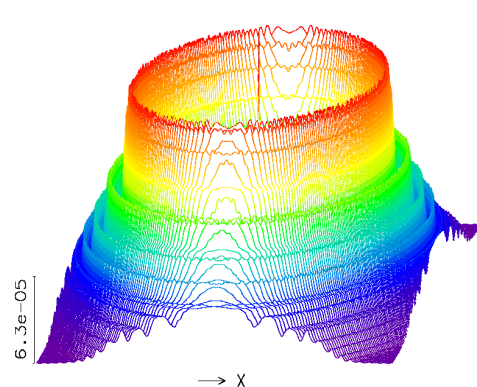
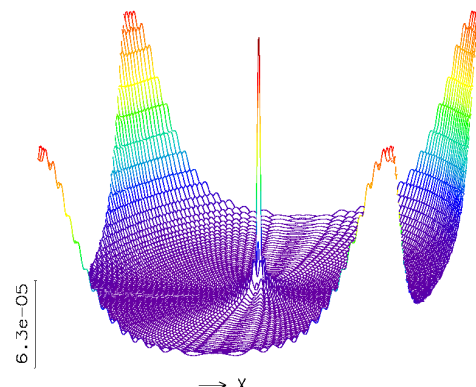
kde $k_t = k \cos \beta$ je transversální vlnové číslo a Q komplexní číslo závisící na podélné souřadnici z . Intenzita BG svazku (5.14) se tedy skládá z tlumícího členu reprezentovaného klesající exponenciální funkcí a rostoucím lineárním členem přímo úměrnému podélné vzdálenosti z . Proto osová intenzita BG svazku roste do určitého maxima a když převládne útlumový člen klesá k nule. Obr. 5.12 ukazuje detailní průběh BG svazku vytvořeného dvěma různými počítačovými programy.

Vývoj intenzity BG svazku vytvořeným pomocí axikonu o průměru 7 mm , deviačním úhlu $0,008 \text{ rad}$ a rovinou vlnou o vlnové délce $632,8 \text{ nm}$ v různých příčných rovinách ilustruje série následujících obrázků obr. 5.13.



Obr. 5.12: Besselovský - gaussovský svazek vytvořený dvěma programy pomocí axikonu $\beta = 0.008 \text{ rad}$, $D = 7 \text{ mm}$, $z = 300 \text{ mm}$

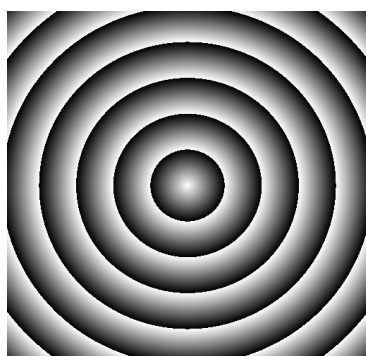
Jednotlivé průběhy intenzit na obr. 5.13 pořízené pomocí komerčního programu OSLO jsou vykresleny na stínítku o ploše $10 \times 10 \text{ mm}$, kromě obr. 5.13 f), který je na ploše $0,5 \times 0,5 \text{ mm}$. V levém dolním rohu jednotlivých obrázků je naznačeno měřítko, pomocí kterého můžeme zjistit, že ve vzdálenosti $z = 300 \text{ mm}$ je osová intenzita BG svazku největší (obr. 5.13 b)).

a) intenzita BG svazku v $z = 150 \text{ mm}$ b) intenzita BG svazku v $z = 300 \text{ mm}$ c) intenzita BG svazku v $z = 450 \text{ mm}$ d) intenzita BG svazku v $z = 600 \text{ mm}$ e) intenzita BG svazku v $z = 800 \text{ mm}$ f) intenzita BG svazku v $z = 800 \text{ mm}$

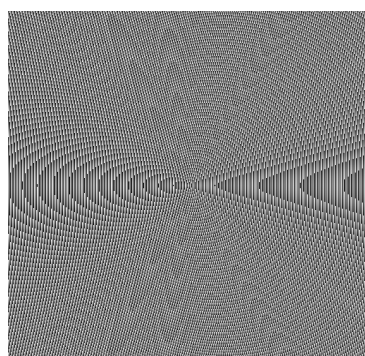
Obr. 5.13: Průběh intenzity BG svazku v různých zastavovacích rovinách vytvořený fázovou maskou axikonu o $\beta = 0,008 \text{ rad}$, $D = 7 \text{ mm}$ programem OSLO

Prstenec, který se objevuje na obr. 5.13 d), e), f), vzniká důsledkem ohraničenosti axikonu. Jeho vývoj není obsažen ve vzorci (5.14), protože jeho platnost je omezena pouze na oblast blízkou optické ose. Experimentální získání BG svazku pomocí fázového SLM P512BOULDER je znázorněno spolu s fázovými maskami na obr. 5.14.

BG svazky vytvořené pomocí axikonu hrají v posledních letech významnou úlohu v optických manipulacích. V naší práci jsme sledovali pouze besselovský svazek prvního druhu a nultého řádu. Vhodnou úpravou fázové masky axikonu lze však generovat i besselovské svazky vyšších řádů ([28] [29], [30]). Může sloužit např. jako přepravník pro mikročástice na vzdálenost několik milimetrů [31] nebo jako nosný svazek pro vírové struktury (tzv. nedifrakční vírový svazek), které ve svých optických pastí drží mikročástice [32].



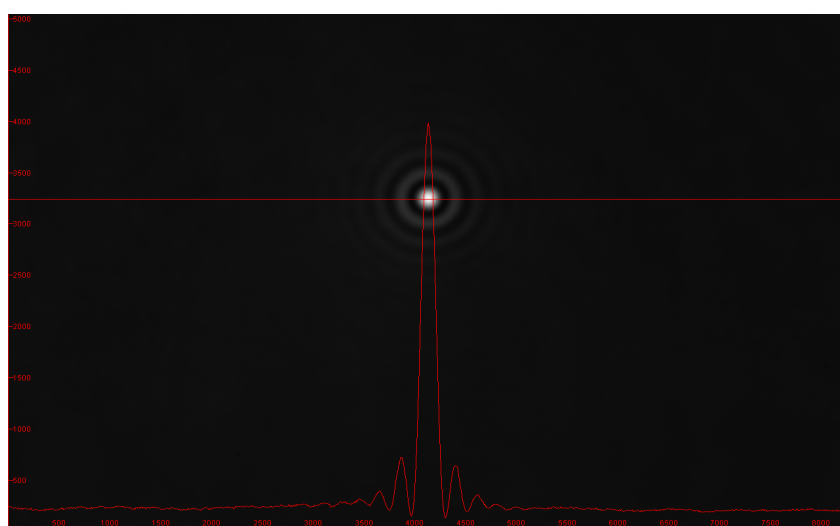
a) fázová maska
axikonu $\beta = 0,0008$ rad



b) kombinovaná fázová maska
axikonu a) a optického klínu
 $\beta = 0,017$ rad



c) zobrazení SLM s
fázovou maskou b)
v $z = 800$ mm



d) výstup ze CCD kamery s vynesným rozdělením příčného profilu
intenzity gaussovského svazku po průchodu SLM s fázovou
maskou b) a čočkou o $f = 300$ mm

Obr. 5.14: Zobrazení SLM P512 BOULDER s fázovou maskou axikonu

5.3. Lokalizace světla pomocí numericky určených DOE

Jednoduché optické prvky v předcházející kapitole jsou základními stavebními kameny třírozměrné lokalizace světla využitelné pro optické manipulace. Chceme-li však vytvářet dynamické optické pinzety o mnoha pastech, je cesta postupné kombinace fázových masek nevhodná. Proto v následující podkapitole formulujeme inverzní úlohu hledání fáze, která je výchozí pro iterační optimalizační algoritmy.

5.3.1. Iterační algoritmy pro návrh fázových masek prostorového modulátoru

Iterační algoritmy využívány pro návrh fázových masek vycházejí z předpokladu, že známe požadované rozdělení intenzity v určité vzdálenosti a umíme popsat šíření světla mezi dvěma zastavovacími rovinami. Jak bylo ukázáno v kapitole 2.3 ve skalární aproximaci lze šíření světla mezi dvěma rovinami popsat pomocí Fourierovy transformace. Proto můžeme sestavit nelineární integrální rovnici a hledat její řešení, které je ukryto v jádru integrálu. Její analytické řešení však v mnoha případech není možné, a proto ji řešíme numericky postupnou iterací.

K dosažení optimální fázové masky musíme sestavit chybové funkce, které budou určovat kvalitu rekonstrukce požadovaného rozdělení intenzity prostřednictvím numericky spočítané fázové masky. Tyto chybové funkce se pak snažíme minimalizovat v jednotlivých iteracích. Může se jednat např. o Strehlovo kritérium, poměr signál – šum, difrakční účinnost, střední kvadratická odchylka intenzit či amplitud. Dále klademe na iterační algoritmy různé požadavky – tzv. stupně volnosti, které omezují jeho konvergenci. Jedná se především o počet a velikost pixelů SLM, počet fázových zdvihů, rychlost výpočtu, frekvenční šířku pásma nebo polohu rekonstrukční roviny.

Tento problém globální optimalizace je znám i z jiných vědních oborů jako je např. ekonomie, psychologie, astronomie nebo matematika a jeho řešení je proto neustále zlepšováno.

5.3.2. Formulace inverzní úlohy určení fáze

Komplexní amplituda v rovině SLM ($z = 0$) $U_i(x, y)$ souvisí s komplexní amplitudou $U_o(x', y')$ ve zvolené pozorovací rovině vztahem (2.2).

Funkce impulsové odezvy volného prostoru, která se v této konvoluci objevuje, může být ve Fresnelově aproximaci (2.10) zapsána jako

$$h(x, y) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[x^2 + y^2]\right\}. \quad (5.15)$$

Komplexní amplituda v rovině SLM je určena jako

$$U_i(x, y) = U(x, y) t(x, y), \quad (5.16)$$

kde

$$U(x, y) = A(x, y) \exp(i\varphi(x, y)) \quad (5.17)$$

je komplexní amplituda dopadající vlny na SLM s amplitudou $A(x, y)$ a fází $\varphi(x, y)$,

$$t(x, y) = \exp(i\varphi_{DOE}(x, y)) \quad (5.18)$$

je funkce propustnosti SLM s hledanou fázovou funkcí $\varphi_{DOE}(x, y)$.

Komplexní amplituda v pozorovací rovině je pak určena jako

$$U_o(x', y') = A_o(x', y') \exp(i\varphi_o(x', y')), \quad (5.18)$$

kde $A_o(x', y')$ je její amplituda a $\varphi_o(x', y')$ je její fáze.

Výsledná nelineární Fresnelova integrální rovnice určená k iteraci nabývá pak tvaru

$$I_i(x', y') = |A_o(x', y')|^2 = \left| \iint_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp(i g(x, y) h(x - x', y - y')) dx dy \right|^2, \quad (5.20)$$

kde $I_i(x', y')$ je požadované rozdělení intenzity a $g(x, y) = \varphi_{DOE}(x, y) + \varphi(x, y)$.

Řešení rovnice (5.20) vede k nalezení požadované fázové funkce $\varphi_{DOE}(x, y)$. V následující podkapitole představíme jeden způsob jejího řešení.

5.3.3. Gerchbergův – Saxtonův algoritmus

Původní Gerchbergův – Saxtonův algoritmus (GS) z roku 1971 byl určen pro zobrazení elektronovým mikroskopem [33]. Patří do třídy iteračních algoritmů (IFTA – Iterative Fourier Transformation Algorithms), které opakovaně používají FT, a proto lze s úspěchem použít pro návrh fázových masek DOE. Hlavní výhodou GS algoritmu při návrhu DOE je vyváženost jeho rychlosti (náročnosti na CPU čas) a přesnosti s jakou dává požadovaný výsledek [34]. Proto je jedním ze základních algoritmů při návrhu fázových DOE pro SLM.

GS algoritmus řeší rovnici (5.20) podle schématu znázorněného na obr. 5.15. Nejdříve odhadneme nějaké rozdělení fáze $\varphi_1(x, y)$ (na obr. 5.15 krok **1**). Pomocí intenzity dopadajícího svazku sestrojíme komplexní amplitudu $I(x, y)^{1/2} \exp(i\varphi_1(x, y))$, kterou s využitím vztahu (2.10) a (5.15) transformujeme do pozorovací roviny $I_1(x', y')^{1/2} \exp(i\varphi_1(x', y'))$ (na obr. 5.15 krok **2**). Vypočteme chybovou funkci jako střední kvadratickou odchylku amplitud ve zvolené pozorovací rovině

$$\delta^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [I_1^{1/2}(x', y') - I_i^{1/2}(x', y')]^2 dx' dy'}{\iint_{-\infty}^{\infty} I_i(x', y') dx' dy'}. \quad (5.21)$$

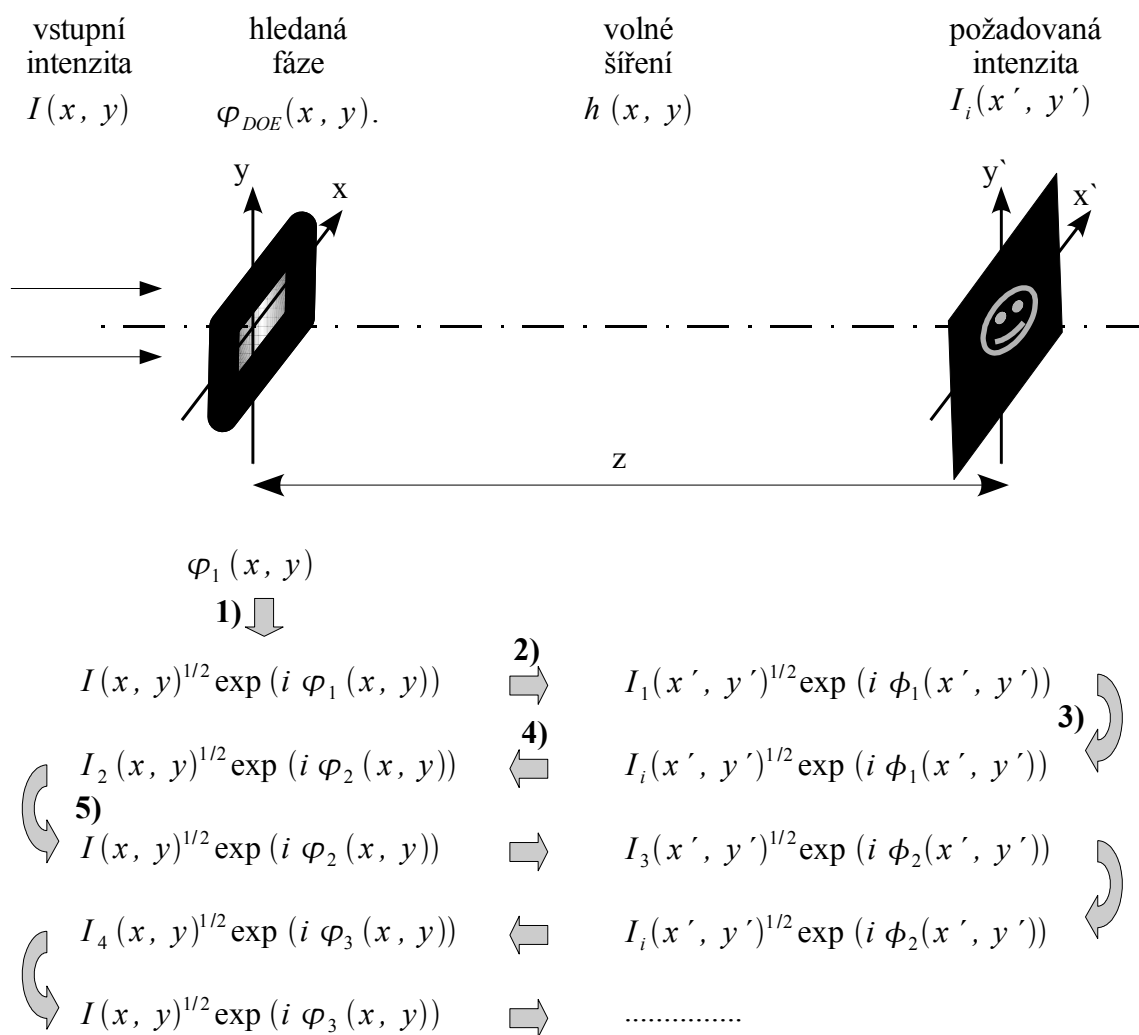
V případě, kdy její velikost nevyhovuje zvolené přesnosti, přepíšeme amplitudu vypočtené vlny odmocninou cílové intenzity $I_i(x', y')$ (na obr. 5.15 krok 3)). Pomocí vztahu (2.10) a (5.15) se zápornou vzdáleností transformujeme vypočtenou amplitudu zpět do roviny SLM (na obr. 5.15 krok 4)). Získáme novou fázovou funkci $\varphi_2(x, y)$, která je možným kandidátem na hledanou fázovou funkci $\varphi_{DOE}(x, y)$. Sestrojíme další chybovou funkci jako střední kvadratickou odchylku amplitud v rovině SLM

$$\delta^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [I_2^{1/2}(x', y') - I^{1/2}(x', y')]^2 dx' dy'}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(x', y') dx' dy'}. \quad (5.22)$$

V případě, kdy její velikost nevyhovuje zvolené přesnosti, přepíšeme amplitudu vypočtené vlny odmocninou vstupní intenzity $I(x', y')$ (na obr. 5.15 krok 5)). Dosavadní schéma (kromě odhadu vstupní fáze) nazveme jednou iterací. Následují další iterace až do chvíle, kdy chybové funkce vyhovují naší zvolené přesnosti.

GS algoritmus se v anglické literatuře někdy nazývá *error-reduction algorithm*. Lze totiž dokázat, že jednotlivými iteracemi klesají hodnoty chybových funkcí (5.21) a (5.22) [35]. Avšak tato konvergence je charakterizovaná stagnací, což znamená, že po určitém rychlém poklesu hodnot chybových funkcí nepřináší další iterace žádné další výrazné zlepšení. Proto GS algoritmus nelze použít pro libovolně zvolené přesnosti. Použitím přídavného adaptivního algoritmu nebo jiným odhadem vstupní fáze lze dosavadní výsledek zlepšit a potlačit efekt stagnace. Proto má GS algoritmus někdy přívlastek parametrický, protože jeho výsledek závisí na parametru - odhadnuté fázi.

GS algoritmus je variantou obecnější gradientní metody [36]. Existuje celá další řada algoritmů, které řeší rovnici (5.20). Jejich popis a srovnání nalezneme např. [19] nebo [34].



Obr. 5.15: Schéma pro Gerchbergův - Saxtonův algoritmus

6. Závěr

Zkoumání metod ovládání SLM je díky jeho aplikacím představených ve čtvrté a páté kapitole stále tématem moderních odvětví optiky, jako je např. singulární či nedifrakční optika. Spolu s počítačem představuje silný vědecký nástroj, který umožňuje aplikace i v jiných vědních oborech jako je např. medicína (mikromanipulace s biologickým materiálem).

Dokonalé ovládání SLM vyžaduje nejen porozumění různým fyzikálním jevům, ale i schopnost jejich numerické simulace, které jsou často časově náročné. Proto s rozvojem výpočetní techniky přichází i možnost dalších aplikací prostorových modulátorů světla. Také nové trendy v nanotechnologiích umožní konstruovat přesnější a kompaktnější modulátory a přinesou jejich další využití.

Seznam použité literatury

- [1] J. W. Goodman: Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, 2. vydání, 1988.
- [2] M. Born, E. Wolf: Principles of Optics, Cambridge University Press, 7. vydání, 1999.
- [3] B. E. A. Saleh, M. C. Teich: Základy fotoniky, Matfyzpres, 1994.
- [4] F. Chlup: Objektivy s difraktivními optickými prvky, bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Katedra Optiky a optoelektroniky, 2005.
- [5] Oslo - Optics Software for Layout and Optimization, Optics Reference 6.1, Lambda Research Corporation, 2001.
- [6] B. Havelka, E. Keprt, M. Hansa: Spektrální analýza 1, Československá akademie věd, 1957.
- [7] J. E. Stockley, D. Subacius, S. A. Serati: The Influence of the Inter-pixel Region in Liquid Crystal Diffraction Gratings, Conference on Liquid Crystal, Devices and Applications VII, SPIE Vol. 3635, 1999.
- [8] E. O. Brigham: The Fast Fourier transform and its applications, Prentice Hall, 1988.
- [9] M. Klíma, M. Bernas, J. Hozman, P. Dvořák: Zpracování obrazové informace, Vydavatelství ČVUT Praha, 1996.
- [10] P. Páta, M. Klíma, J. Kaiser: http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/matlab01/, Využití prostředí MATLAB pro simulaci optického zpracování informace, 2001.
- [11] H. T. Heideman, D.H. Johnson: Gauss and the history of the fast Fourier transform, Archive for History of Exact Sciences, 34, č.3, 265 – 277, 1985.
- [12] G. C. Danielson, C. Lanczos: Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids, J. Franklin Inst., 233, č. 4 365 - 380, 1942.
- [13] J. W. Cooley, J. W. Tukey: An algorithm for machine calculation of complex Fourier series, Math. Comp., 19, 297 – 301, 1965.
- [14] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky: Numerical recipes in C: the art of scientific computing, Cambridge University Press, New York, 1988.
- [15] P. W. Shor: Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, SIAM J. Computing, 26, 1484 – 1509, 1997.
- [16] <http://www.sendme.cz/sklad/>, Porovnání jednotlivých integrálních transformací, 2003.
- [17] Z. Bouchal: Optické víry - nový směr rozvoje singulární optiky, Československý časopis pro fyziku, svazek 53, č. 1, 2003.
- [18] P. Török, P. R. T. Munro: The use of Gauss - Laguerre vector beams in STED microscopy, Optics Express, Vol. 12, No. 15, 2004.

- [19] J. A. Soifer et al: *Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [20] K. Rektorys et al: *Přehledužitá matematiky*, SNTL, 2. vydání, 1968.
- [21] A. Ashkin: Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure, *Physical Review Letters*, 24, 156 – 159, 1970.
- [22] Y. Roichman, B. Sun, J. Amato-Grill, D. G. Grier: Optical forces arising from phase gradient, *Physical Review Letters* E, připraveno k tisku, 2007.
- [23] T. Čižmár, V. Kollárová, Z. Bouchal, P. Zemánek: Sub-micron particle organization by self imaging of non-diffracting beams, *New Journal of Physics*, 8, 43, 2006.
- [24] A. Boivin: *Théorie de calcul des figures de diffraction de révolution*, Les presses de l'Université de Laval, Quebec, 1964.
- [25] A. Burvall: Axicon imaging by scalar diffraction theory, disertační práce, Royal Institute of Technology Stockholm, Department of Microelectronics and Information, Optics Section, 2004.
- [26] A. T. Friberg: Stationary-phase analysis of generalized axicons, *Journal Optical Society of America*, Vol. 13, No. 4, 743 – 750, 1996.
- [27] Z. Bouchal: Optical properties and utilization of pseudo-nondiffracting beams with extreme dimension, teze, katedra Optiky, UP v Olomouci, 2007.
- [28] J. Arlt, K. Dholakia: Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon, *Optics Communications*, 177, 297 – 301, 2000.
- [29] V. V. Kotlyar, S. N. Khonina, V. A. Soifer: Algorithms for the generation of non-diffracting Bessel modes, *Journal of modern optics*, Vol. 42, No. 6, 1231 – 1239, 1995.
- [30] C. Paterson, R. Smith: Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms, *Optics Communications*, 124, 121 – 130, 1996.
- [31] T. Čižmár, M. Šiler, P. Zemánek: An optical nanotrap array movable over a millimetre range, *Applied Physics B*, 84, 197 – 203, 2006.
- [32] Z. Bouchal, J. Courtial: Connection of singular and nondiffracting optics, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 6, S184 – S188, 2004.
- [33] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton: A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures, *OPTIK*, Vol. 35, No. 2, 237 – 246, 1971.
- [34] P. Meyruies, B. Kress: *Digital Diffractive Optics, An Introduction to Planar Diffractive Optics and Related Technology*, John Wiley & Sons, 2000.
- [35] B. Lin, N. C. Gallagher: Convergence of a spectrum shaping algorithm, *Applied Optics*, 13, 2470 – 2471, 1974.
- [36] J. R. Fienup: Phase retrieval algorithm: a comparison, *Applied Optics*, 21, 2758 – 2769, 1982.

Programové přílohy – 1. FFT

```

/*Algoritmus pro výpočet N-dimenzionální Fourierovy transformace prostřednictvím funkce fourn.
*****
* Funkci fourn, jsou předávány následující parametry:
- pole pom[[]], které obsahuje hodnoty komplexní amplitudy
- pole mm[], které udává rozměr FFT, přičemž hodnoty jeho prvků udávají počet dat v jednotlivých
  dimenzích, a musí být mocninou 2;
- parametr ndim udávající rozměr FFT;
- parametr isign, který určuje, zda se bude jednat o přímou či inverzní Fourierovu transformaci.
*/

/*Definice potřebných standardních knihoven jazyka C.*/
#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*Definice konstant.*/
#define k 512 // Počet dat ve směru osy x - v textu označeno jako N.
#define l 512 // Počet dat ve směru osy y - v textu označeno jako M.
#define pi 3.141592653589793 // Ludolfovo číslo pi s přesností pro trigonometrické výpočty.

void fourn(float pom[][2*1], long mm[], int ndim, int isign); // Prototyp funkce provádějící FFT.

/*Základní funkce main.*/
int main(void)
{
    /*Deklarace proměnných, které vstupují do funkce fourn z vnějšku.*/
    int i, j; // Sčítací indexy.
    long mm[3]; // Pole udávající počet komplexních čísel ve všech dimenzích.
    mm[1]=k; // Konstanta k = počet řádků.
    mm[2]=l; // Konstanta l = počet sloupců.
    int isign; // Určuje zda se jedná o přímou (hodnota je 1) či inverzní (hodnota je -1) FFT.
    int ndim=2; // Udává rozměr FFT.
    float pom[k][2*1]; // Předávaný vstupní signál, který je přepsán do pole data[] a
                        // nakonec použit pro zapsání výstupního signálu.

    /*Nastavení nějakých parametrů komplexní amplitudy - zde všechny pokládáme rovny nule.*/
    for(i=0; i<k; i++)
    {
        for(j=0; j<l; j++)
        {
            pom[i][2*j]=0.0;
            pom[i][(2*j)+1]=0.0;
        }
    }

    /*Volání funkce fourn, která po výpočtu opět vrátí pole pom[[]], ale s transformovanými
    hodnotami.*/
    isign=1; // Nastavení přímé FFT.
    fourn(pom, mm, ndim, isign);
    return 0;
}

/*Samotná funkce fourn.*/
void fourn(float pom[][2*1], long mm[], int ndim, int isign)
{
    /*Deklarace typu proměnných.*/
    int i, j, idim;
    float pom1;
    long i1, i2, i3, i2rev, i3rev, ip1, ip2, ip3, ifp1, ifp2;
    long ibit, k1, k2, n, nprev, nrem, ntot;
    double wtemp, wr, wpr, wpi, wi, theta;
    float tempr, tempi;
    float data[(2*k*1)+1];
    /*Jednorozměrné pole data[(2*k*1)+1], do kterého se přepíše vstupní hodnoty komplexní amplitudy
    z pole pom[][2*1]. Toto pole délky 2*N*M má následující uspořádání hodnot komplexní
    amplitudy: hodnota data[1] je reálná část první hodnoty komplexní amplitudy a data[2] její
    imaginární část, ....
    * Data[0] jsou nastaveny na nulu.*/

    /*Přepsání vstupních dat z dvoudimenzionálního pole pom[k][2*1] do jednodimenzionálního pole

```

```

    data[], vhodného pro FFT.*/
for(i=0;i<k;i++)
for(j=0;j<(2*1);j++)
    data[j+1+(i*2*1)]=pom[i][j];

/*Procedura FFT.*/
for(ntot=1, idim=1; idim<=ndim; idim++)
    ntot*=mm[idim];
nprev=1;
for(idim=ndim; idim>=1; idim--)
{
    n=mm[idim];
    nrem=ntot/(n*nprev);
    ip1=nprev<<1;
    ip2=ip1*n;
    ip3=ip2*nrem;
    i2rev=1;

    /*Bitového přehazování pro pro určení bodové transformace.*/
    for(i2=1; i2<=ip2; i2+=ip1)
    {
        if(i2<i2rev)
        {
            for(i1=i2; i1<=(i2+ip1-2); i1+=2)
            {
                for(i3=i1; i3<=ip3; i3+=ip2)
                {
                    i3rev=i2rev+i3-i2;

                    tempr=data[i3];
                    data[i3]=data[i3rev];
                    data[i3rev]=tempr;
                    tempi=data[i3+1];
                    data[i3+1]=data[i3rev+1];
                    data[i3rev+1]=tempi;
                }
            }
        }
        i2rev=i2>>1;
        while((i2rev>=ip1) && (i2rev>i2rev))
        {
            i2rev-=i2rev;
            i2rev>>=1;
        }
        i2rev+=i2rev;
    }

    /*Rekurzivní uplatňování Danielsonovy-Lanczosovy věty.*/
    ifp1=ip1;
    while(ifp1<ip2)
    {
        ifp2=ifp1<<1;

        /*Počítání W-čísel.*/
        theta=sign*(6.28318530717959/(ifp2/ip1));
        wtemp=sin(0.5*theta);
        wpr=-2.0*wtemp*wtemp;
        wpi=sin(theta);
        wr=1.0;
        wi=0.0;
        for(i3=1; i3<=ifp1; i3+=ip1)
        {
            for(i1=i3; i1<=(i3+ip1-2); i1+=2)
            {
                for(i2=i1; i2<=ip3; i2+=ifp2)
                {
                    k1=i2;
                    k2=k1+ifp1;
                    tempr=wr*data[k2]-wi*data[k2+1];
                    tempi=wr*data[k2+1]+wi*data[k2];
                    data[k2]=data[k1]-tempr;
                    data[k2+1]=data[k1+1]-tempi;
                    data[k1]+=tempr;
                    data[k1+1]+=tempi;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;
        wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
    }
    ifp1=ifp2;
}
nprev*=n;
}

/*Přepis hodnot komplexní amplitudy z pole data[] do pole pom[][*].*/
for(i=0;i<k;i++)
    for(j=1;j<=(2*1);j++)
        pom[i][j-1]=data[j+(i*2*1)];
for(i=0;i<k;i++)
    for(j=0;j<(2*1);j++)

/*Pro případ inverzní FFT dělení faktorem 1/(k*1).*/
if(isign==-1)
{
    pom1=1.0/(k*1);
    for(i=0;i<k;i++)
        for(j=0;j<(2*1);j++)
            pom[i][j]=pom1*pom[i][j];
}

/* Uspořádání hodnot v poli pom[][*] od nejmenší frekvence (největší negativní) po největší
   pozitivní frekvenci.*/
if(isign==1)
{
    for(i=0;i<k;i++) // Uspořádání dat v jednotlivých řádcích.
    {
        for(j=2;j<=(1-2);j+=2)
        {
            tempr=pom[i][1+j];
            pom[i][1+j]=pom[i][j];
            pom[i][j]=tempr;
            tempi=pom[i][1+j+1];
            pom[i][1+j+1]=pom[i][j+1];
            pom[i][j+1]=tempi;
        }
        tempr=pom[i][1];
        pom[i][1]=pom[i][0];
        pom[i][0]=tempr;
        tempi=pom[i][1+1];
        pom[i][1+1]=pom[i][1];
        pom[i][1]=tempi;
    }
    for(i=0;i<=(2*1-1);i++) // Uspořádání dat v jednotlivých sloupcích.
    {
        for(j=1;j<(k/2);j++)
        {
            tempr=pom[(k/2)+j][i];
            pom[(k/2)+j][i]=pom[j][i];
            pom[j][i]=tempr;
        }
        tempr=pom[k/2][i];
        pom[k/2][i]=pom[0][i];
        pom[0][i]=tempr;
    }
}
}
}

```

Programové přílohy – 2. HG svazky

```

/*Algoritmus pro výpočet parametrů hermiteovského - gaussovského svazku libovolného řádu (p,q).
*****
* Při velkých hodnotách parametrů (p,q) závisí výpočet na CPU Vašeho počítače z důvodu vyčíslení
* Hermiteových polynomů.*/

/*Definice potřebných standardních knihoven jazyka C.*/
#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*Definice konstant.*/
#define lambdar 632.8e-9 // Vlnová délka He-Ne laseru.
#define pi 3.141592653589793 // Ludolfovo číslo pi s přesností pro trigonometrické výpočty.
#define k 512 // Počet dat ve směru osy x - v textu označeno jako N.
#define l 512 // Počet dat ve směru osy y - v textu označeno jako M.
#define q 2 // Řád HG svazku ve směru osy x.
#define p 6 // Řád HG svazku ve směru osy y.

/*Základní funkce main.*/
int main(void)
{
    int i,j,o; // Sčítací indexy.
    double k0; // Vlnové číslo HG svazku.

    /*Deklarace proměnných související se souřadnicemi.*/
    float z; // Pozorovací vzdálenost.
    double dx,dx1,dx0,dxi; // Proměnné osy x.
    double dy,dyl,dy0,dyi; // Proměnné osy y.
    double r02; // Polohový vektor HG svazku.

    /*Deklarace proměnných související s HG svazkem.*/
    float z0; // Rayleighova vzdálenost.
    float A0,A1; // Veličiny pro komplexní obálku komplexní amplitudy HG svazku.
    float W0; // Pološířka svazku ve vzdálenosti z=0.
    float Wz; // Pološířka svazku ve vzdálenosti z=z.
    float Rz; // Poloměr křivosti HG svazku v z=z.
    float fii; // Fázové zpoždění HG svazku oproti fázi rovinné vlny.
    float hx[p+2],hy[q+2]; // Hermiteovy polynomy.
    double argU0,argR; // Argumenty trigonometrických funkcí.
    double ReU0,ImU0; // Reálná a imaginární část amplitudy HG svazku.
    float IO; // Intenzita HG svazku.

    /*Určení základních parametrů HG svazku.*/
    z=0.0; // Určení pozorovací vzdálenosti - v metrech.
    A1=1.0; // Určení amplitudy komplexní obálky HG svazku.
    z0=4.964590161; // Určení Rayleighovy vzdálenosti (pro z0=4964590161 je stopa svazku v pase
    W0=0.001m).

    /*Základní výpočty pro určení parametrů HG svazku.*/
    k0=(2*pi)/lambdar; // Výpočet vlnového čísla - v metrech na minus prvou.
    A0=A1/z0; // Výpočet komplexní obálky komplexní amplitudy HG svazku.
    fii=atan(z/z0); // Výpočet fázového zpoždění HG svazku oproti fázi rovinné vlny.
    W0=sqrt((lambdar*z0)/pi); // Výpočet pološířky svazku v z=0.
    Wz=W0*sqrt(1+(z/z0)*(z/z0)); // Výpočet pološířky svazku v z=z.
    if(z==0.0)Rz=10e500; // Určení poloměru křivosti svazku ve vzdálenosti z = 0.0 (musí být nekonečný)
    else(Rz=z*(1+(z0/z)*(z0/z))); // Výpočet poloměru křivosti HG svazku v z=z.

    /*Určení základních parametrů PMS - rozměry a vzorkování. Předpokládáme, že střed souřadného systému
    PMS je v jeho středu.*/
    dy0=-5.76e-3; // Pološířka výšky PMS.
    dx0=dy0; // Pološířka šířky PMS.
    dyl=5.76e-3;
    dxl=dyl;
    dxi=(dxl-dx0)/(k-1); // Vzorkování v ose x.
    dyi=(dyl-dy0)/(l-1); // Vzorkování v ose y.

    /*Výpočet HG svazku.*/
    dx=dx0; // Okraj PMS.
    for(i=0;i<k;i++)
    {

```

```

dy=dy0;
for(j=0;j<1;j++)
{
    /*Výpočet Hermiteových polynomů.*/
    hx[0]=hy[0]=1;
    hx[1]=2*sqrt(2.0)*dx/Wz;
    hy[1]=2*sqrt(2.0)*dy/Wz;
    for(o=2;o<=p;o++)
        hx[o]=hx[1]*hx[o-1]-2*(o-1)*hx[o-2];
    for(o=2;o<=q;o++)
        hy[o]=hy[1]*hy[o-1]-2*(o-1)*hy[o-2];

    /*Výpočet argumentů reálné a imaginární části komplexní amplitudy HG svazku.*/
    r02=(dx*dx)+(dy*dy);
    if(z==0.0)
    {
        argU0=0.0;
        argR=A0*exp(-r02/(W0*W0))*hx[p]*hy[q];
    }
    else
    {
        argU0=-k0*z-k0*(r02/(2*Rz))+fii*(p+q+1);
        argR=A0*(W0/Wz)*exp(-r02/(Wz*Wz))*hx[p]*hy[q];
    }
    /*Výpočet reálné a imaginární části komplexní amplitudy HG svazku.*/
    ReU0=argR*sin(argU0); // Reálná část komplexní amplitudy HG svazku.
    ImU0=-argR*cos(argU0); // Imaginární část komplexní amplitudy HG svazku.
    I0=(ReU0*ReU0)+(ImU0*ImU0); // Intenzita HG svazku.
    printf("%f ",I0); // Tisk hodnot intenzity HG svazku.
    dy=dy+dyi;
}
dx=dx+dxi;
}
return 0;
}

```

Programové přílohy – 3. LG svazky

```

/*Algoritmus pro výpočet parametrů laguerreovského - gaussovského (LG) svazku libovolného řádu
(p,q).
*****
* Při velkých hodnotách parametrů (p,q) závisí výpočet na CPU Vašeho počítače z důvodu vyčíslení
* Laguerreových polynomů. LG svazky se někdy udávají i v modulované formě, což tento program
* také zohledňuje v pomocné veličině "e".*/

/*Definice potřebných standardních knihoven jazyka C.*/
#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*Definice konstant.*/
#define lambdar 632.8e-9 // Vlnová délka He-Ne laseru.
#define pi 3.141592653589793 // Ludolfovo číslo pi s přesností pro trigonometrické výpočty.
#define k 512 // Počet dat ve směru osy x - v textu označeno jako N.
#define l 512 // Počet dat ve směru osy y - v textu označeno jako M.
#define p 4 // Řád LG svazku.
#define q 7 // Řád LG svazku.

/*Základní funkce main.*/
int main(void)
{
    int i,j,o; // Sčítací indexy.
    double k0; // Vlnové číslo LG svazku.
    float c,d,e; // Pomocné veličiny.

    /*Deklarace proměnných související se souřadnicemi.*/
    float z; // Pozorovací vzdálenost.
    double dx,dx1,dx0,dxi; // Proměnné osy x.
    double dy,dyl,dy0,dyi; // Proměnné osy y.
    double r,alfa; // Válcové souřadnice pro LG svazek.

    /*Deklarace proměnných související s HG svazkem.*/
    float z0; // Rayleighova vzdálenost.
    float A0; // Veličiny pro komplexní obálku komplexní amplitudy HG svazku.
    float W0; // Pološířka svazku ve vzdálenosti z=0.
    float Wz; // Pološířka svazku ve vzdálenosti z=z.
    float Rz; // Poloměr křivosti HG svazku v z=z.
    float fii; // Fázové zpoždění HG svazku oproti fázi rovinné vlny.
    float lag[p+2]; // Laguerreovy polynomy.
    double argU0,argR; // Argumenty trigonometrických funkcí.
    double ReU0,ImU0; // Reálná a imaginární část amplitudy HG svazku.
    float I0; // Intenzita HG svazku.

    /*Určení základních parametrů HG svazku.*/
    z=0.0; // Určení pozorovací vzdálenosti - v metrech.
    A0=10.0; // Určení amplitudy komplexní obálky LG svazku.
    W0=0.001; // Pološířka svazku v z=0.

    /*Základní výpočty pro určení parametrů LG svazku.*/
    k0=(2*pi)/lambdar; // Výpočet vlnového čísla - v metrech na minus prvou.
    fii=atan(z/z0); // Výpočet fázového zpoždění LG svazku oproti fázi rovinné vlny.
    z0=k0*W0*W0/2.0; // Výpočet Rayleighovy vzdálenosti.
    if(z==0.0)
    {
        Wz=W0; // Výpočet pološířky svazku v z=z.
        Rz=10e500; // Určení poloměru křivosti svazku ve vzdálenosti z = 0.0 (musí být nekonečný)
        fii=0.0;
        argR=0.0;
        c=pow((sqrt(2)/Wz),q)*A0;
    }
    else
    {
        Wz=W0*sqrt(1+(z/z0)*(z/z0)); // Výpočet pološířky svazku v z=z.
        Rz=z*(1+(z0/z)*(z0/z)); // Výpočet poloměru křivosti LG svazku v z=z.
        fii=atan(z/z0);
        argR=-(2*p+q+1)*fii+(-k0*z);
        c=(W0/Wz)*pow((sqrt(2)/Wz),q)*A0;
    }
}

```

```

/*Určení základních parametrů PMS - rozměry a vzorkování.
 * Předpokládáme, že střed souřadného systému PMS je v jeho středu.*/
dy0=-5.76e-3; // Položička výšky PMS.
dx0=dy0; // Položička šířky PMS.
dyl=5.76e-3;
dxl=dyl;
dxi=(dxl-dx0)/(k-1); // Vzorkování v ose x.
dyi=(dyl-dy0)/(l-1); // Vzorkování v ose y.

/*Výpočet LG svazku.*/
dx=dx0; // Okraj PMS.
for(i=0;i<k;i++)
{
    dy=dy0;
    for(j=0;j<l;j++)
    {

        /*Zavedení válcových souřadnic.*/
        r=sqrt(dx*dx+dy*dy);
        if(dx>0.0 && dy>0.0) alfa=asin(dy/r);
        else if(dx<0.0 && dy>0.0) alfa=pi-asin(dy/r);
        else if(dx<0.0 && dy<0.0) alfa=asin(dy/r)+pi;
        else if(dx>0.0 && dy<0.0) alfa=2*pi-asin(dy/r);

        /*Výpočet Laguerreových polynomů.*/
        d=2.0*r*r/(Wz*Wz);
        lag[0]=1.0;
        lag[1]=-d+(q+1);
        for(o=1;o<=p;o++)
            lag[o+1]=lag[o]*(q+2.0*o+1-d)-lag[o-1]*(q+o)*o;

        /*Výpočet argumentů reálné a imaginární části komplexní amplitudy LG svazku.*/
        if(z==0.0) argU0=0.0;
        else (argU0=k0*r*r/(2.0*Rz)); // Argument komplexní amplitudy.
        // e=exp(-r*r/(Wz*Wz))*pow(r,q)*lag[p]*cos(q*alfa); // Modulované LG kosinové svazky.
        // e=exp(-r*r/(Wz*Wz))*pow(r,q)*lag[p]*sin(q*alfa); // Modulované LG sinové svazky
        // Pro LG sinové svazky nesmí být hodnota q rovna 0.0. Pak jsou totiž konstantní s nulovou
        // intenzitou.
        e=exp(-r*r/(Wz*Wz))*pow(r,q)*lag[p]; // Klasické LG svazky.
        if(z==0.0) argU0=alfa*q;
        else (argU0=alfa*q+k0*r*r/(2.0*Rz));

        /*Výpočet reálné a imaginární části komplexní amplitudy LG svazku.*/
        ReU0=c*e*cos(argU0+argR); // Reálná část komplexní amplitudy LG svazku.
        ImU0=c*e*sin(argU0+argR); // Imaginární část komplexní amplitudy LG svazku.
        I0=(ReU0*ReU0)+(ImU0*ImU0); // Intenzita LG svazku.
        printf("%f ",I0); // Tisk hodnot intenzity HG svazku.
        dy=dy+dyi;
    }
    dx=dx+dxi;
}
return 0;
}

```


Programové přílohy – 4. Fázové masky

```

/*Algoritmus pro výpočet fázových masek analytických DOE (klín, sférická a cylindrická čočka,
 * Woodova destička, axikon) a obrazců jimi vytvořených pomocí SLM v rovině z.
 * *****
 * Součástí programu je i volání funkce fourn, která provádí FFT, takže pro správnou funkci
 * programu musí být tato funkce přidána.*/

/*Definice potřebných standardních knihoven jazyka C.*/
#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*Definice konstant.*/
#define lambdar 632.8e-9 // Vlnová délka He-Ne laseru.
#define pi 3.141592653589793 // Ludolfovo číslo pi s přesností pro trigonometrické výpočty.
#define k 512 // Počet dat ve směru osy x - v textu označeno jako N.
#define l 512 // Počet dat ve směru osy y - v textu označeno jako M.
#define q 2 // Řád HG svazku ve směru osy x.
#define p 6 // Řád HG svazku ve směru osy y.

void fourn(float pom[][2*1],long mm[],int ndim,int isign); // Prototyp funkce provádějící FFT.

/*Základní funkce main.*/
int main(void)
{
/*Deklarace proměnných, které vstupují do funkce fourn z vnějšku.*/
long mm[3]; // Pole udávající počet komplexních čísel ve všech dimenzích.
mm[1]=k; // Konstanta k = počet řádků.
mm[2]=l; // Konstanta l = počet sloupců.
int isign; // Určuje zda se jedná o přímou (hodnota je 1) či inverzní (hodnota je -1) FFT.
int ndim=2; // Udává rozměr FFT.
float T; // Škálovací faktor pro FFT.
float pom[k][2*1]; // Předávaný vstupní signál, který je přepsán do pole data[] a
// nakonec použit pro zapsání výstupního signálu long mm[3];

/*Obecné proměnné.*/
int i,j,o; // Sčítací indexy.
float m,n;
float pom1,pom2,pom3,pom4,pom5,pom6;
double k0; // Vlnové číslo dopadajícího svazku.
float po[k][1]; // Pole pro zobrazení pouze reálných složek signálu.

/*Deklarace proměnných související se souřadnicemi.*/
double dx,dx1,dx0,dxi; // Proměnné osy x.
double dy,dyl,dy0,dyi; // Proměnné osy y.
double fx,fxl,fx0,fxi; // Prostorové frekvence osy vx.
double fy,fyl,fy0,fyi; // Prostorové frekvence osy vy.
double r02,r; // Polohový vektor svazku a jeho odmocnina.
float z; // Uražená vzdálenost dopadajícího svazku.
float f; // Ohnisko pro jednotlivé analytické DOE.
float d; // Pozorovací vzdálenost - funkce přenosu volného prostoru.

/*Deklarace proměnných související s HG svazkem.*/
float z0; // Rayleighova vzdálenost.
float A0,A1; // Veličiny pro komplexní obálku komplexní amplitudy HG svazku.
float W0; // Pološířka svazku ve vzdálenosti z=0.
float Wz; // Pološířka svazku ve vzdálenosti z=z.
float Rz; // Poloměr křivosti HG svazku v z=z.
float fii; // Fázové zpoždění HG svazku oproti fázi rovinné vlny.
float hx[p+2],hy[q+2]; // Hermiteovy polynomy.
double argU0,argR; // Argumenty trigonometrických funkcí.
double ReU0,ImU0; // Reálná a imaginární část amplitudy HG svazku.
float I0; // Intenzita HG svazku.

/*Proměnné modulátoru a fázových masek.*/
float pixvyska,pixsirka; // Udává výšku a šířku jednoho pixelu SLM.
double klin; // Představuje lámavý úhel optického klínu.
double sklon; // Představuje azimutální naklonění optického klínu.
double theta; // Proměnná pro přenosovou funkci volného prostoru.
double pocet_schodu1,pocet_schodu2; // Udává počet fázových schodů - při redukci fázové funkce.

```

```

int interval1,interval2; // Proměnná pro redukci fázové funkce.
float faze_krok_i,faze_krok_j; // Udává výškový rozdíl mezi dvěma fázovými schody.
double faze[k][l]; // Fázová funkce.

/*Určení základních parametrů HG svazku.*/
z=0.0; // Určení pozorovací vzdálenosti - v metrech.
A1=1.0; // Určení amplitudy komplexní obálky HG svazku.
z0=1.0; // Určení Rayleighova vzdálenosti (pro z0=4964590161 je stopa svazku v pase W0=0.001m).
f=0.30; // Určení ohniskové vzdálenosti.
d=0.3; // Určení roviny pozorování.
T=1.0; // Určení škálovacího faktoru pro FFT.
klin=0.008; // Určení lámavého úhlu optického klínu.

/*Základní výpočty.*/
k0=(2*pi)/lambdar;
pixvyska=(2*dx1)/k;
pixsirka=(2*dy1)/l;

/*Určení základních parametrů SLM - rozměry a vzorkování.
 * Předpokládáme, že střed souřadného systému SLM je v jeho středu.*/
dy0=-3.84e-3/T; // Pološířka výšky SLM.
dx0=dy0; // Pološířka šířky SLM.
dy1=3.84e-3/T;
dx1=dy1;
dxi=(dx1-dx0)/(k-1); // Vzorkování v ose x.
dyi=(dy1-dy0)/(l-1); // Vzorkování v ose y.

/*Nastavení hodnot fázové funkce na nulu.*/
for(i=0;i<k;i++)
{
    for(j=0;j<l;j++)
    {
        faze[i][j]=0.0;
    }
}

/*Fázová maska axikonu.*/
dx=dx0;
for(i=0;i<k;i++)
{
    dy=dy0;
    for(j=0;j<l;j++)
    {
        r=sqrt((dx*dx)+(dy*dy));
        faze[i][j]=k0*r*tan(klin);
        if(faze[i][j]>(2.0*pi)) faze[i][j]=faze[i][j]-floor(faze[i][j]/(2.0*pi))*(2.0*pi);
        faze[i][j]=faze[i][j]-(2.0*pi);
        faze[i][j]=-faze[i][j];
        dy=dy+dyi;
    }
    dx=dx+dxi;
}

/*Fázová maska válcové čočky.*/
dx=dx0;
for(i=0;i<k;i++)
{
    dy=dy0;
    for(j=0;j<l;j++)
    {
        r=k0*((dx*dx)/(2.0*f));
        if(r>(2.0*pi)) r=r-((floor(r/(2.0*pi)))*2.0*pi);
        faze[i][j]=faze[i][j]+r;
        if(faze[i][j]>(2.0*pi)) faze[i][j]=faze[i][j]-floor(faze[i][j]/(2.0*pi))*2.0*pi;
        faze[i][j]=-(faze[i][j]-(2.0*pi));
        dy=dy+dyi;
    }
    dx=dx+dxi;
}

/* Fázová maska Woodovy zonální destičky.*/
dx=dx0;
for(i=0;i<k;i++)
{
    dy=dy0;
    for(j=0;j<l;j++)

```

```

    {
        r=(dx*dx)+(dy*dy);
        if (sin(pi*(r/(lambdar*f)))>0.0) faze[i][j]=(faze[i][j]+pi)/2.0;
        else faze[i][j]=faze[i][j];
        if (sqrt(r)>(200.0*dxi)) faze[i][j]=0.0;
        dy=dy+dyi;
    }
    dx=dx+dxi;
}

/*Fázová maska optického klínu.*/
for (i=0; i<k; i++)
{
    dy=dy0;
    for (j=0; j<l; j++)
    {
        if (dy<0.0) dx=dy1+dy;
        else dx=dy+dy1;
        faze[i][j]=faze[i][j]+k0*dx*tan(klin);
        if (faze[i][j]>(2.0*pi)) faze[i][j]=faze[i][j]-(floor(faze[i][j]/(2.0*pi))*2.0*pi);
        dy=dy+dyi;
    }
}

/*Základní výpočty pro určení parametrů HG svazku.*/
A0=A1/z0; // Výpočet komplexní obálky komplexní amplitudy HG svazku.
fii=atan(z/z0); // Výpočet fázového zpoždění HG svazku oproti fázi rovinné vlny.
W0=sqrt((lambdar*z0)/pi); // Výpočet polšířky svazku v z=0.
Wz=W0*sqrt(1+(z/z0)*(z/z0)); // Výpočet pološířky svazku v z=z.
if (z==0.0) Rz=10e500; // Určení poloměru křivosti svazku ve vzdálenosti z = 0.0 (musí být nekonečný)
else (Rz=z*(1+(z/z0)*(z/z0))); // Výpočet poloměru křivosti HG svazku v z=z.

/*Výpočet HG svazku.*/
dx=dx0; // Okraj SLM.
for (i=0; i<k; i++)
{
    dy=dy0;
    for (j=0; j<l; j++)
    {
        /*Výpočet Hermiteových polynomů.*/
        hx[0]=hy[0]=1;
        hx[1]=2*sqrt(2.0)*dx/Wz;
        hy[1]=2*sqrt(2.0)*dy/Wz;
        for (o=2; o<=p; o++)
            hx[o]=hx[1]*hx[o-1]-2*(o-1)*hx[o-2];
        for (o=2; o<=q; o++)
            hy[o]=hy[1]*hy[o-1]-2*(o-1)*hy[o-2];

        /*Výpočet argumentů reálné a imaginární části komplexní amplitudy HG svazku.*/
        r02=(dx*dx)+(dy*dy);
        if (z==0.0)
        {
            argU0=faze[i][j]; // Započtení vlivu fázové masky SLM.
            argR=A0*exp(-r02/(W0*W0))*hx[p]*hy[q];
        }
        else
        {
            argU0=-k0*z-k0*(r02/(2*Rz))+fii*(p+q+1)+faze[i][j]; // Započtení vlivu fázové masky SLM.
            argR=A0*(W0/Wz)*exp(-r02/(Wz*Wz))*hx[p]*hy[q];
        }

        /*Výpočet reálné a imaginární části komplexní amplitudy HG svazku.*/
        ReU0=argR*sin(argU0); // Reálná část komplexní amplitudy HG svazku.
        ImU0=-argR*cos(argU0); // Imaginární část komplexní amplitudy HG svazku.

        /*Možnost zobrazení pouze ideální rovinnou vlnou.*/
        argU0=-k0*z+faze[i][j];
        ReU0=sin(argU0);
        ImU0=cos(argU0);

        I0=(ReU0*ReU0)+(ImU0*ImU0); // Intenzita HG svazku.
        dy=dy+dyi;
    }
    dx=dx+dxi;
}

```

```

/*Volání funkce FFT*/
isign=1;
fourn(pom,mm,ndim,isign);

/*Výpočty ve Fourierově rovině.*/
/*Zavedení prostorových frekvencí.*/
fx0=-1.0/(2.0*dx/T);
fy0=-1.0/(2.0*dy/T);
fxi=-fx0-(k/2.0-1.0)/(k*dx/T);
fyi=-fy0-(l/2.0-1.0)/(l*dy/T);
fxl=-fx0-fxi;
fyl=-fy0-fyi;
fx=fx0;

/*Výpočet přenosové funkce volného prostoru.*/
pom3=d*pi*lambda;
pom4=k0*d;
for(i=0;i<k;i++)
{
    fy=fy0;
    for(j=0;j<l;j++)
    {
        pom1=pom[i][2*j];
        pom2=pom[i][(2*j)+1];
        theta=pom3*((fx*fx)+(fy*fy))-pom4;
        pom5=cos(theta);
        pom6=sin(theta);
        pom[i][2*j]=pom5*pom1-pom6*pom2;
        pom[i][(2*j)+1]=pom5*pom2+pom6*pom1;
        po[i][j]=pom[i][2*j]*pom[i][2*j]+pom[i][(2*j)+1]*pom[i][(2*j)+1];
        fy+=fyi;
    }
    fx+=fxi;
}

/*Volání funkce FFT.*/
isign=-1;
fourn(pom,mm,ndim,isign);

/*Kreslení výstupního signálu.*/
for(i=0;i<k;i++)
{
    for(j=0;j<l;j++)
    {
        po[i][j]=pom[i][2*j]*pom[i][2*j]+pom[i][(2*j)+1]*pom[i][(2*j)+1];
        printf("%f ",po[i][j]);
    }
}

return 0;
}

```

Programové přílohy – 5. Kreslicí program

```

/*Algoritmus pro vykreslení výstupních dat do dvoudimenzionálního obrázku.
*****
* Používáme knihovnu GD.*/

/*Definice potřebných standardních knihoven jazyka C.*/
#include <gd.h> // Nestandardní knihovna - zdarma ke stažení n internetu.
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

/*Definice konstant.*/
#define INVERZE 0 // 0 - Neinverzně, 1 - Inverzně.
#define BAREV 256 // Maximálně 256 stupňů šedi.
#define W 512 // Šířka obrázku.
#define H 512 // Výška obrázku.
#define LENVAL 20 // Předpoklad, že jedna hodnota zabírá v souboru maximálně 20 znaků.

/*Základní funkce main.*/
int main (void) {
    gdImagePtr img;
    FILE *IMG;
    int ic[BAREV];
    int gray;
    int j,i,iz, index;
    int x, y;
    int values[W*H];
    char valch[LENVAL];
    char line[W*H*LENVAL];
    int lenline;
    double val, maxval, minval;

    /* Načtení hodnot.*/
    if (fgets(line, W*H*LENVAL-1, stdin) == NULL) {
        printf ("Chyba při čtení!\n");
        return (1);
    }
    lenline=strlen(line);
    line[lenline]=' ';
    ++lenline;
    line[lenline]='\0';

    /* Zjištění maximální hodnoty.*/
    i = 0;
    iz = 0;
    for (j=0; j<lenline; ++j) {
        if (line[j] == ' ') {
            valch[iz]='\0';
            val = atof (valch);
            if (i == 0 || val > maxval) {
                maxval = val;
            }
            if (i == 0 || val < minval) {
                minval = val;
            }
            ++i;
            iz = 0;
        }
        else {
            valch[iz]=line[j];
            ++iz;
        }
    }
    i=W*H;
    printf("Pocet hodnot: %d\n", i-1);
    printf("Minimalni hodnota: %.4f\n", minval);
    printf("Maximalni hodnota: %.4f\n", maxval);

    /* Načtení hodnot již relativně upravených k maximální hodnotě.*/
    i = 0;

```

```

    iz = 0;
    for (j=0; j<lenline; ++j) {
        if (line[j] == ' ') {
            valch[iz]='\0';
            val = atof (valch);
            values[i]=(int) ((BAREV-1)*(val-minval)/(maxval-minval));
            ++i;
            iz = 0;
        }
        else {
            valch[iz]=line[j];
            ++iz;
        }
    }

    img = gdImageCreate (W, H); // Definice obrázku.
    // Alokace barev.
    for (i=0; i<BAREV; ++i) {
        gray = (int) (i*255.0/(BAREV-1));
        if (INVERZE) {
            index=BAREV-1-i;
        }
        else {
            index=i;
        }
        ic[index] = gdImageColorAllocate (img, gray, gray, gray);
    }
    // Vykreslení hodnot.
    x=0;
    y=0;
    for (i=0; i<W*H; ++i) {
        if (x==W) {
            x=0;
            ++y;
        }
        // printf("%d,%d: %d\n", x, y, values[i]);
        gdImageSetPixel (img, x, y, ic[values[i]]);
        ++x;
    }
    // Uložení do souboru.
    IMG = fopen("obrazek1.png", "wb");
    gdImagePng(img, IMG);
    fclose(IMG);
    // Vyčištění paměti.
    gdImageDestroy(img);
    return 0;
}

```